Matematika s primjenom u ekonomiji

Ana Perišić · Kristina Devčić
Veleučilište u Šibeniku, 2016

Naslov izdanja: Matematika s primjenom u ekonomiji
Autori: Ana Perišić i Kristina Devčić
Izdavač: Veleučilište u Šibeniku
Za izdavača: Anita Grubišić, mag.oec.
Recenzent: prof.dr.sc. Nikola Koceić-Bilan
ISBN: 978-953-7566-31-9

Adresa izdavača:
VELEUČILIŠTE U ŠIBENIKU
Trg Andrije Hebranga 11, 22000 Šibenik
Tel: 022/311 060
Fax: 022/311 076

Ana Perišić, Kristina Devčić
Matematika s primjenom u ekonomiji, udžbenička literatura
1. izdanje, Šibenik, Veleučilište u Šibeniku, 2016.
ISBN: 978-953-7566-31-9

Sadržaj

Predgovor

Ovaj udžbenik je nastao kao rezultat višegodišnjeg rada sa studentima predidplomskih stručnih studija ekonomskih usmjerenja te pokriva gradivo kolegija Matematika na preddiplomskom stručnom studiju Menadžment na Veleučilištu u Šibeniku i kolegija Gospodarska matematika 1, na preddiplomskom stručnom studiju Ekonomika poduzetništva na Veleučilištu Nikola Tesla u Gospiću. Pored toga, udžbenik može poslužiti studentima viših godina ekonomskih usmjerenja, te praktičarima koji koriste matematičke alate u ekonomskim analizama. Udžbenik je posebno prikladan studentima koji su većinom orijentirani na primjenu matematičkih metoda u ekonomskim istraživanjima i praksi. Iz tog razloga je poseban naglasak stavljen na obradu problema ekonomske prirode koji u svom rješavanju koriste matematički alat i matematičke tehnike. Teorijski uvod u svakom odjeljku napravljen sažeto, izbjegavanjem suviše formalne matematičke strukture koja se inače sastoji od nizanja definicija, teorema i korolara, već je upotrebljen matematički jezik primjereniji studentima nematematičkih studija.

U prvom poglavlju dan je vrlo kratki uvod iz naivne teorije skupova na razini potrebnoj za obradu drugih tema. U drugom poglavlju obrađeni su osnovni elementi linearne algebre. Treće poglavlje obrađuje osnovne elemente matematičke analize i diferencijalnog računa realne funkcije realne varijable. Na kraju poglavlja pripremljeni su zadaci u formi ispita koji studentima mogu poslužiti za samoprovjeru znanja. Vjerujemo da će studentima posebno korisno biti četvrto poglavlje u koje su uvršteni primjeri ispitnih zadataka za samoprocjenu znanja iz cjelokupnog gradiva obrađenog u ovom udžbeniku. U zadnjem poglavlju dano je kratko ponavljanje nužnog srednjoškolskog matematičkog znanja potrebnog za čitanje ovoga teksta i kvalitetno praćenje matematičkih kolegija na preddiplomskim stručnim studijima ekonomskih usmjerenja.

Unaprijed zahvaljujemo svim čitateljima na njihovim primjedbama vezanim uz eventualne greške, nepreciznosti ili nedostatke, a iste ćemo uvažiti pri pripremi novih izdanja. Posebno se zahvaljujemo recenzentu prof. dr. sc. Nikoli Koceić-Bilanu na suradnji i korisnim sugestijama.

Autorice

Poglavlje 1

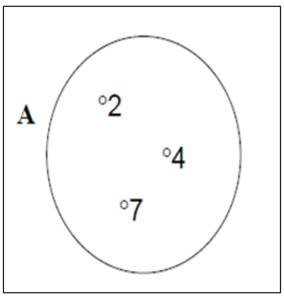
Skupovi

1.1 Pojam skupa

Skup je osnovni pojam koji se ne definira. Intuitivno, zamišljamo ga kao kolekciju objekata koji zajedno čine cjelinu. Skupove možemo zadavati opisno ili nabrajanjem.

Imena skupova obično pišemo velikim latiničnim slovima (A, B, S, X), a elemente skupa malim slovima (a, b, s, x) te ih nabrajamo u vitičastim zagradama. Pojam "biti element skupa" jedan je od osnovnih matematičkih pojmova. Činjenicu da je a element skupa S pišemo $a \in S$ (i čitamo "a je element skupa S), a činenicu da b nije element skupa S pišemo $b \notin S$ (i čitamo "b nije element skupa S). Skupove obično prikazujemo Vennovim dijagramima.

Primjer 1.1. *Prikaz skupa $A = \{2, 4, 7\}$ Vennovim dijagramom*



Vennov dijagram

Kardinalni broj skupa je broje elemenata u tom skupu i označavamo ga sa $card(A)$. Tako je za točlani skup $A = \{2, 4, 7\}$ kardinalitet skupa A jednak tri, to jest $card(A) = 3$.

Skup koji nema elemenata zovemo prazan skup i označavamo sa $\emptyset$.

Primjer 1.2. *Primjeri skupova.*

a) *Skup prva tri slova slova abecede je* $S = \{A, B, C\}$.

b) *Skup prvih pet prirodnih brojeva* $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

c) *Skup svih studenata prve godine na Veleučilištu XXX.*

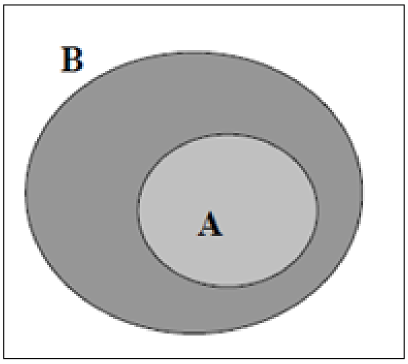
Primjer 1.3. *Promotrimo skup* $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
Činjenicu da se broj 1 nalazi u skupu S pišemo $1 \in S$ *i kažemo "*1 *je element skupa* S*".*
Činjenicu da se broj 10 ne nalazi u skupu S pišemo $10 \notin S$ *i kažemo da "*10 *nije element skupa* S*".*

Skupove možemo zadati opisno ili nabrajanjem svih njegovih elemenata. Tak,o na primjer, isti skup možemo zadati na dva načina:
Opisno: S je skup svih samoglasnika; ili nabrajanjem svih njegovih elemenata $S = \{a, e, i, o, u\}$.

1.1.1 Jednakost skupova

Neka su A i B skupovi. Ako je svaki element skupa A ujedno i element skupa B kažemo da je A podskup skupa B i pišemo $A \subseteq B$.

$$A \subseteq B \text{ ako za svaki } a \in A \ \Rightarrow a \in B.$$



$A \subseteq B$

Nadalje, dva skupa se smatraju jednakima ako se sastoje od istih elemenata odnosno ako je svaki element skupa A ujedno i element skupa B, te je svaki element skupa B ujedno element skupa A. Dakle, vrijedi:

$$A = B \text{ ako i samo ako } A \subseteq B \text{ i } B \subseteq A.$$

Primjer 1.4. *Dani su skupovi*

$P = \{1, 2, 3, 4\}$, $Q = \{4, 3, 2, 1\}$ *i* $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Primijetimo da vrijedi: $P \subseteq S$, $Q \subseteq S, P \subseteq Q$, $Q \subseteq P$.

Nadalje, vrijedi: $P \subseteq Q$ *i* $Q \subseteq P$ *pa slijedi da je* $P = Q$.

Zadatak 1.1. *Dani su skupovi* $S = \{2, 4, 6, 8, 10\}, P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ *i* $R = \{10, 8, 6, 4, 2\}$. *Odredite postoje li u ovom primjeru jednaki skupovi. Je li koji od ovih skupova kojem skupu podskup?*

Rješenje.

Skupovi S *i* R *su jednaki jer sadrže iste elemente, pišemo* $S = R$.

Skup S *je posdskup skupa* P. *Pišemo* $S \subseteq P$.

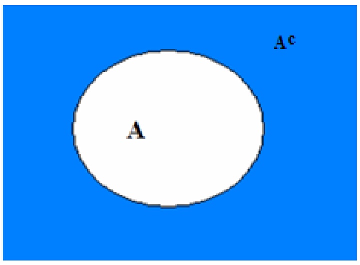
Također, skup R *je podskup skupa* P, *tj.* $R \subseteq P$.

1.1.2 Univerzalni skup i komplement skupa

Često se promatraju samo podskupovi nekog unaprijed određenog skupa $\mathcal{U}$ kojeg zovemo univerzalan skup.Univerzalan skup varira od problema do problema te skupovi izvan $\mathcal{U}$ kao da i ne postoje. Najčešće ga prikazujemo kao kvadrat ili pravokutnik u ravnini te unutar njega

Neka je $A \subseteq \mathcal{U}$ i $A \neq \mathcal{U}$. Promotrimo sve elemente skupa $\mathcal{U}$ koji nisu u skupu A. Ti elementi tvore skup koji zovemo komplement skupa A i označavamo s A^C ili $\overline{A}$.

$$A^C = \{x \mid x \in U \text{ i } x \notin A\}$$



Komplement skupa

Zadatak 1.2. *Ako je* $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5\}, A = \{2, 4\}$. *Odredite* A^C..

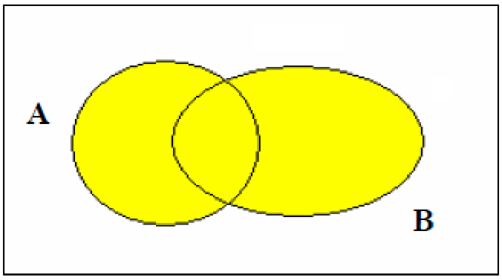
(Rješenje. $A^C = \{1, 3, 5\}$*).*

1.1.3 Operacije na skupovima

Neka su A i B podskupovi univerzalnog skupa U. **Unija** skupova A i B, u oznaci $A \cup B$, je skup koji se sastoji od elemenata koji pripadaju barem jednom od skupova A ili B.

Napomenimo: $A \cup B = B \cup A$.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ili } x \in B\}$$



$A \cup B$

Primjer 1.5. *Primjeri unija skupova su:*

a) $\{1, 2, 3\} \cup \{4\} = \{1, 2, 3, 4\}$

b) $\{a, b\} \cup \{c, d, e\} = \{a, b, c, d, e\}$

c) $\{a, b, c\} \cup \{c\} = \{a, b, c\}$

d) $\{100, 34, 50\} \cup \emptyset = \{100, 34, 50\}$

Općenito, $A \cup \emptyset = A$

e) $\{a, b, c\} \cup \{a, b, c\} = \{a, b, c\}$

Općenite, $A \cup A = A$

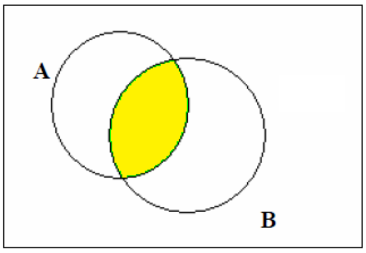
f) $\{5, 6, 7, 8, 9, 12\} \cup \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\} = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

g) $\{x : x > 3\} \cup \{x : x > 45\} = \{x : x > 3\}$.

Presjek dvaju skupova A i B, u oznaci $A \cap B$, je skup koji se sastoji od elemenata koji se istovremeno nalaze i u skupu A i u skupu B. Skupove koji nemaju zajedničkih elemenata zovemo **disjunktni** skupovi. Presjek disjunktnih skupova je prazan skup.

Napomenimo: $A \cap B = B \cap A$.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ i } x \in B\}$$



$A \cap B$

Primjer 1.6. *Primjeri presjeka skupova su:*

a) $\{a, b, c\} \cap \{a, b\} = \{a, b\}$

b) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \cap \{1, 2, 3, 12, 34\} = \{1, 2, 3\}$

c) $\{2, 4, 6, 8, 10\} \cap \{1, 3, 5, 7\} = \emptyset$.

d) $\{a, b, c, d, e\} \cap \emptyset = \emptyset$

Općenito, $A \cap \emptyset = \emptyset$

e) $\{a, b, c\} \cap \{a, b, c\} = \{a, b, c\}$

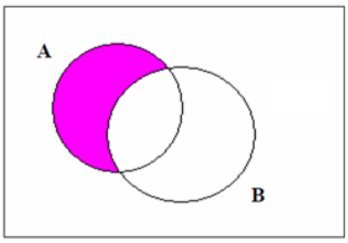
Općenite, $A \cap A = A$

f) $\{x : x > 15\} \cap \{x : x > 20\} = \{x : x > 20\}$

g) $\{x : x < 9\} \cap \{x > 5\} = \{x : 5 < x < 9\}$.

Razlika dvaju skupova A i B, u oznaci $A \backslash B$ je skup koji se sastoji od svih elemenata skupa A koji ujedno nisu i u skupu B. Napomenimo da $A \backslash B \neq B \backslash A$.

$$A \backslash B = \{x \mid x \in A \text{ i } x \notin B\}$$



$A \backslash B$

Primjer 1.7. *Primjeri razlike skupova su:*

a) $\{1,2,3,4,5\} \backslash \{1,5\} = \{2,3,4\}$

b) $\{a,b,c,d,e\} \backslash \{b,c,d,e,f,h\} = \{a\}$

c) $\{a,b\} \backslash \emptyset = \{a,b\}$

d) $\{a,b\} \backslash \{a,b\} = \emptyset$.

Svojstva operacija sa skupovima

1. Komutativnost

$$\begin{aligned} A \cap B &= B \cap A, \\ A \cup B &= B \cup A. \end{aligned}$$

2. Asocijativnost

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C), \\ (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C). \end{aligned}$$

3. Idempotentnost

$$\begin{aligned} A \cup A &= A, \\ A \cap A &= A. \end{aligned}$$

4. Distributivnost

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C), \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{aligned}$$

5. Involutivnost

$$\left(A^C\right)^c = A.$$

Zadatak 1.3. *Neka su dani skupovi* $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $B = \{2, 3, 4, 6\}$, $C = \{1, 3, 5\}$, $D = \{3, 6, 9, 12, 15\}$, $E = \{1, 11\}$. *Odredite* $A \cap B$, $A \cap C, B \cup C, C \backslash E, C \cup D, D \backslash E, D \backslash C, D \cap C, B \cap E$.

Rješenje.

$A \cap B = \{2, 3, 4, 6\}$

$A \cap C = \{1, 3, 5\}$

$B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$C \backslash E = \{3, 5\}$

$C \cup D = \{1, 3, 5, 6, 9, 12, 15\}$

$D \backslash E = \{3, 6, 9, 12, 15\}$

$D \backslash C = \{6, 9, 12, 15\}$

$D \cap C = \{3\}$

$B \cap E = \emptyset$.

Zadatak 1.4. *Neka su dani skupovi* $S = \{m, a, t, e\}$, $P = \{m, a, t, i\}$ *i* $K = \{k, a\}$. *Odredite* $S \cup P$, $S \cap P, S \cap P \cap K, S \cup P \cup K$.

Rješenje.

$S \cup P = \{m, a, t, e, i\}$

$S \cap P = \{m, a, t\}$

$S \cap P \cap K = \{a\}$

$S \cup P \cup K = \{m, a, t, e, i, k\}$.

1.2 Kartezijev produkt

Neka su A i B neprazni skupovi. Kartezijev produkt skupova A i B, u oznaci $A \times B$, je skup koji se sastoji od uređenih parova (a, b) gdje je $a \in A$, $b \in B$ (a je element skupa A,dok je b element skupa B). Očito je $A \times B \neq B \times A$ (osim u slučaju kada je $A = B$).

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

Za uređene parove vrijedi $(a, b) = (c, d)$ ako je $a = c$ i $b = d$.

Primjer 1.8. *Primjeri Kartezijevih produkata*

a) $\{a, b\} \times \{c, d\} = \{(a, c), (a, d), (b, c), (b, d)\}$

b) $\{1, 2\} \times \{1, 3\} = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3)\}$

c) $\{1, 0\} \times \{1, 0\} = \{(1, 1), (1, 0), (0, 1), (0, 0)\}$.

Primjer 1.9. *Neka su dani skupovi $A = \{T, F\}$ i $B = \{0, 1\}$. Tada je Kartezijev produkt tih skupova skup:*

$$A \times B = \{(T, 0), (T, 1), (F, 0), (F, 1)\}$$
$$B \times A = \{(0, T), (0, F), (1, T), (1, F)\}.$$

Napomenimo kako Kartezijevo množenje skupova općenito nije komutativno,

$$A \times B \neq B \times A.$$

Kartezijevo množenje će biti komutativno ako i samo ako je $A = B$, no tada govorimo o **Kartezijevom kvadratu skupa** A :

$$A^2 = A \times A = \{(a, b) \mid a, b \in A\}$$

Zadatak 1.5. *Za skup $A = \{1, 2\}$ odredite Kartezijev kvadrat skupa A.*
Rješenje:

$$A^2 = A \times A = \{(a, b) \mid a, b \in A\} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$$

Za Kartezijev kvadrat definira se njegova dijagonala:

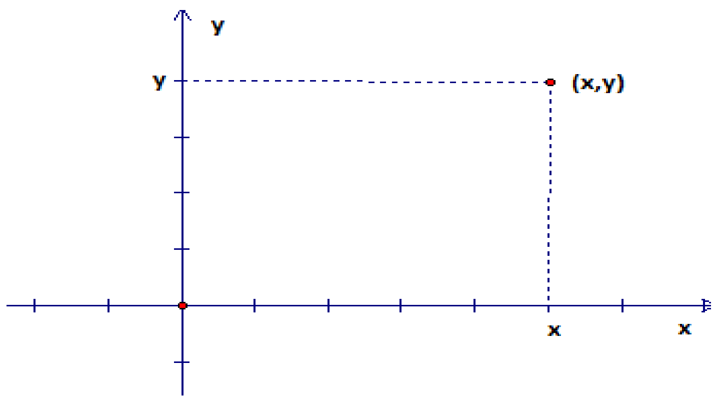
$$D = \{(a, a) \mid a \in A\} \subset A^2$$

Primjer 1.10. *Za skup $A = \{1, 2\}$ odredimo dijagonalu Kartezijevog kvadrata A^2.*

$$D = \{(a, a) \mid a \in X\} = \{(1, 1), (2, 2)\}$$

Primjer 1.11. *Neka su skupovi A i B jednaki skupu realnih brojeva ($A = B = \mathbb{R}$). Tada je Kartezijev kvadrat skupova:*

$$A \times B = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

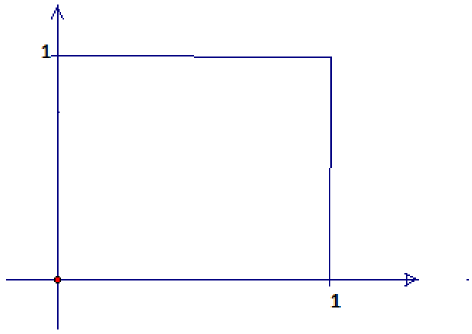


Koordinatna ravnina - Kartezijev koordinatni sustav

Primijetimo, u Kartezijevom koordinatnom sustavu imamo dvije koordinatne osi x-os i $y-$os, te svaka točka $T = (x, y)$ ima dvije koordinate.

Primjer 1.12. *Neka su skupovi A i B jednaki te neka vrijedi da je $A = B = I = [0, 1]$. Onda je Kartezijev kvadrat skupova:*

$$A \times B = I \times I = I^2 = \{(x, y) \mid 0 \leq x, y \leq 1\}$$



$[0, 1] \times [0, 1]$

Poglavlje 2

Matrice

2.1 Pojam matrice i osnovne matrične operacije

Matrica je pravokutna shema brojeva, parametara, funkcija ili varijabli, a članovi te sheme nazivaju se elementima matrice. Matricu zamišljamo kao tablicu od m redaka i n stupaca. Svaki njen element ima svoju poziciju (mjesto na kojem se nalazi) - u kojem retku i u kojem stupcu. Imena matrica pišemo velikim slovom.

Matrice se zapisuju u obliku:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

2.1.1 Tipovi matrica

Ako matrica A ima m redaka i n stupaca kažemo da je matrica A tipa $m \times n$ i pišemo $A \in M_{m\times n}$. Elemente matrice A zapisujemo u obliku a_{ij}, gdje i $(i = 1, ..., m)$ označava redak u kojem se element nalazi, a j $(j = 1, ..., n)$ označava stupac u kojeme se element nalazi.

Primjer 2.1. *Slijede primjeri tipova matrica*

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}$ *je matrica tipa* 2×3 *(*$A \in M_{2\times 3}$*).*

2. $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$ *je matrica tipa* 2×2 *(*$B \in M_{2\times 2}$*).*

   Općenito, matrice tipa $n \times n$ *zovemo* ***kvadratne*** *matrice. Kod kvadratnih matrica je ponekad od interesa promatrati elemente koji se nalaze na dijagonali, a to su elementi* b_{ii}*, u ovom primjeru elementi dijagonale su* $b_{11} = 1$ *i* $b_{22} = -5$*.*

3. $C = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ *je matrica* 1×3 *(*$C \in M_{1\times 3}$*).*

   Općenito matricu tipa $1 \times n$*, tj. matricu koja se sastoje samo od jednog retka, zovemo* ***redčana*** *matrica.*

4. $D = \begin{bmatrix} 100 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$ *je matrica* 3×1 *(*$D \in M_{3\times 1}$*).*

   Općenito, matricu tipa $n \times 1$*, tj. matricu koja se sastoji od samo jednog stupca, zovemo* ***stupčana*** *matrica.*

5. $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *je matrica tipa* 3×2 *(*$E \in M_{3\times 2}$*).*

   Općenito, matricu bilo kojeg tipa koja sadrži samo nule zovemo ***nul-matrica****.*

6. $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *je matrica tipa* 3×3 *(*$f \in M_{3\times 3}$*).*

   Općenito, kvadratnu matricu ($n \times n$ *matricu) koja na dijagonali ima jedinice, a van dijagonale nule zovemo* ***jedinična*** *matrica.*

Zadatak 2.1. *Odredite tip matrice* $A = \begin{bmatrix} 9 & -8 & -3 & 55 \\ 4 & -5 & 12 & -1 \end{bmatrix}$ *i elemente* a_{13}*,* a_{22}*,* a_{14}*,* a_{21}*.*

Rješenje.

Matrica A *je* 2×4 *matrica.*
$a_{13} = -3$*,* $a_{22} = -5$*,* $a_{14} = 55$*,* $a_{21} = 4$*.*

Zadatak 2.2. *Odredite tip matrice* $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ *i elemente* b_{12}, b_{11}, b_{32}, b_{21}, b_{31}.

Rješenje.

Matrica B *je* 3×2 *matrica.*
$b_{12} = -2$, $b_{11} = 1$, $b_{32} = 0$, $b_{21} = 3$, $b_{31} = -1$.

2.1.2 Jednakost matrica

Dvije matrice A i B koje su istog tipa $(m \times n)$ su jednake ako vrijedi $a_{ij} = b_{ij}$ za sve $i = 1, ..., m$ i $j = 1, ..., n$.

Zadatak 2.3. *Kojeg su tipa matrice* $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \end{bmatrix}$ *i ima li među njima jednakih?*

Rješenje.
Matrice A *i* B *su* 3×1 *matrice, dok je* C 1×3 *matrica.*
Nema jednakih matrica među njima, iako matrice B *i* C *sadrže iste brojeve, drugačijeg su tipa!*

2.1.3 Transponirana matrica

Transponiranu matricu matrice A dobivamo zamjenom redaka i stupaca (na način da retci matrice A prelaze u stupce - automatski stupci prelaze u retke). Dakle, ako matrica A ima tri retka i dva stupca, njoj transponirana matrica će imati dva retka i tri stupca. Element a_{ij} matrice A, postaje a_{ji} element transponirane matrice. Transponiranu matricu označavamo s A^T.

Zadatak 2.4. *Odredite transponirane matrice matricama* $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 12 \end{bmatrix}$,

$B = \begin{bmatrix} 11 & 2 \\ 1 & -4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$.

Rješenje.
$A^T = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 12 \end{bmatrix}$, $B^T = \begin{bmatrix} 11 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$, $C^T = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$.

2.1.4 Simetrična matrica

Primjetimo kako se matrica C u prethodnom zadatku prilikom transponiranja nije promijenila. Ona je simetrična matrica. **Simetrična** matrica je matrica koja je jednaka svojoj transponiranoj matrici. Simetrične matrice mogu biti samo kvadratne matrice.

Zadatak 2.5. *Provjerite jesu li sljedeće matrice simetrične:* $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 5 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 14 & -9 & 4 \end{bmatrix}$.

Rješenje.
$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, *vidimo da* $A \neq A^T$ *pa to nije simetrična matrica.*
$B^T = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 5 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$, *vidimo da* $B = B^T$ *pa je* B *simetrična.*
Matrica C *sigurno nije simetrična jer nije kvadratna.*

2.1.5 Gornjetrokutaste i donjetrokutaste matrice

Matrica je **gornjetrokutasta** ako su joj svi elementi ispod dijagonale jednaki nuli.

Primjer gornjetrokutastematrice je je matrica $A = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 7 \\ 0 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$.

Matrica je **donjetrokutasta** ako su joj svi elementi iznad dijagonale jednaki nuli.

Primjer donjetrokutaste matrice je je matrica $A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 9 & -3 & 0 \\ 6 & -1 & 4 \end{bmatrix}$.

Matrica je **dijagonalna** ako su joj svi elementi iznad i ispod dijagonale jednaki nuli. Dijagonalna matrica je i donjetrokutasta i gornjetrokutasta.

Primjer dijagonalne matrice je matrica $D = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Zadatak 2.6. *Odredite jediničnu i nul matricu* 2×2 *matricu.*

Rješenje.

$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$

Zadatak 2.7. *Navedite primjer simetrične i nul-matrice tipa* 2×2.

Rješenje.

$$\textit{Simetrična} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$\textit{Nul-matrica} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 2.8. *Odredite* a *i* b *takve da matrica* A *bude simetrična ako je* $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ a & 7 & 1 \\ 5 & b & 8 \end{bmatrix}$.

Rješenje.

Kako je a *na mjestu* $(2,1)$, *mora biti jednaka elementu na mjestu* $(1,2)$, *a to je broj* 4. *Znači,* $a = 4$. *Na isti način donosimo zaključak o elementu* b. *On se nalazi na mjestu* $(3,2)$ *i mora biti jednak elementu na mjestu* $(2,3)$, *a to je broj* 1. *Dakle,* $b = 1$.

2.1.6 Zbrajanje i oduzimanje matrica

Zbrajati i oduzimati možmo samo matrice istog tipa. Zbrajanje (oduzimanje) vršimo na način da zbrojimo (oduzmemo) elemente na istim pozicijama.

$$A \pm B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \dots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{bmatrix}$$

Zadatak 2.9. *Zbrojite matrice A i B ako je*

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & 9 & 5 \\ 0 & 5 & -6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 14 & 3 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & -9 & 1 \end{bmatrix}$.

c) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 9 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & -6 & 12 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 & 4 & -1 & 1 \\ 5 & 5 & -2 & 9 \\ -6 & 11 & 4 & 2 \end{bmatrix}$.

Rješenje.

a)

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & 9 & 5 \\ 0 & 5 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 & -1+1 & -2+3 \\ 3+0 & 9-5 & 5-3 \\ 0-1 & 5+2 & -6+2 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 7 & -4 \end{bmatrix}$$

b)

$$A + B = \begin{bmatrix} 14 & 3 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -9 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14+4 & 3-9 & 6+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & -6 & 7 \end{bmatrix}$$

c)

$$A+B=\begin{bmatrix}2 & -1 & -2 & 0\\ 3 & 9 & 5 & 3\\ 0 & 5 & -6 & 12\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}7 & 4 & -1 & 1\\ 5 & 5 & -2 & 9\\ -6 & 11 & 4 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+7 & -1+4 & -2-1 & 0+1\\ 3+5 & 9+5 & 5-2 & 3+9\\ 0-6 & 5+11 & -6+4 & 12+2\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}9 & 3 & -3 & 1\\ 8 & 14 & 3 & 12\\ -6 & 16 & -2 & 14\end{bmatrix}.$$

Zadatak 2.10. *Oduzmite matrice C i D.*

a) $C=\begin{bmatrix}4 & 2\\ -3 & 1\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}1 & 5\\ -1 & 0\end{bmatrix}$

b) $C=\begin{bmatrix}3 & 5 & 4\\ -2 & 0 & 9\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}1 & 7 & -2\\ 4 & 4 & 5\end{bmatrix}$.

Zadatak 2.11. *Rješenje.*

a)

$$C-D=\begin{bmatrix}4 & 2\\ -3 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 5\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4-1 & 2-5\\ -3+1 & 1-0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -3\\ -2 & 1\end{bmatrix}$$

b)

$$C-D=\begin{bmatrix}3 & 5 & 4\\ -2 & 0 & 9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 7 & -2\\ 4 & 4 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -2 & 6\\ -6 & -4 & 4\end{bmatrix}.$$

Zadatak 2.12. *Dane su matrice* $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -4\\ -5 & 6 & 8\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3 & 3 & 5\\ 8 & -6 & -9\end{bmatrix}$ *i* $C=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 4 & -1 & 3\end{bmatrix}$. *Izračunajte $A+B-C$.*

Rješenje.

$$A+B-C=\begin{bmatrix}1+3-1 & 0+3-0 & -4+5-(-1)\\ -5+8-4 & 6-6-(-1) & 8-9-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 3 & 2\\ -1 & 1 & -4\end{bmatrix}.$$

Zadatak 2.13. *Zadane su matrice* $A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ *i* $B = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ b & 9 \end{bmatrix}$. *Odredite a i b tako da matrica* $A + B$ *bude dijagonalna.*

Rješenje.
Izračunajmo najprije matricu $A + B$.

$$A + B = \begin{bmatrix} 4+7 & a+3 \\ 2+b & 3+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & a+3 \\ 2+b & 12 \end{bmatrix}.$$

Ova matrica će biti dijagonalna ako su elementi van dijagonale jednaki nuli, tj. vrijedi $a + 3 = 0$ *i* $b + 2 = 0$ *pa iz toga dobivamo* $a = -3$ *i* $b = -2$.

Zadatak 2.14. *Zadane su matrice* $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$ *i* $B = \begin{bmatrix} 4 & b \\ 0 & -9 \end{bmatrix}$. *Odredite b takav da matrica* $A - B$ *bude donjetrokutasta.*

Rješenje.

Izračunajmo matricu $A - B$.

$$A - B = \begin{bmatrix} -1-4 & -1-b \\ -2-0 & -4-(-9) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -1-b \\ -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Da bi ova matrica bila donjetrokutasta svi elementi iznad dijagonale moraju biti jednaki 0. Odatle slijedi$-1 - b = 0$, *tj.* $b = -1$.

2.1.7 Množenje matrica skalarom

Množenje (cijele) matrice skalarom (brojem) vršimo tako da svaki njen element pomnožimo tim brojem. Na primjer

$$5A = 5 \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ -10 & -20 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 2.15. *Ako su dane matrice* $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ *i* $B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$. *Odredite* $A - 3B$.

Rješenje.

$$A - 3B = \begin{bmatrix} 5-3\cdot(-2) & 0-3\cdot(-1) \\ 4-3\cdot(0) & 1-3\cdot 5 \\ -1-3\cdot 0 & 2-3\cdot(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 4 & -14 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 2.16. *Ako su dane matrice* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ *i* $B = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$. *Odredite* $3A + B^T$.

Rješenje.

$$3A + B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 13 \end{bmatrix}.$$

2.1.8 Množenje matrica

Možemo množiti samo ulančane matrice, tj. možemo računati $A \cdot B$ samo ako je broj stupaca matrice A jednak broju redaka matrice B. Pritom je važno napomenuti da $A \cdot B$ ne mora biti jednako $B \cdot A$. Štoviše, ukoliko je moguće izračunati $A \cdot B$, to ne znači da je ujedno moguće izračunati i $B \cdot A$.Dalje se postavlja pitanje: ako je matrica A $m \times n$ matrica, a matrica B je $n \times p$ matrica, kojeg je tipa matrica $C = A \cdot B$? Matrica C će biti tipa $m \times p$, tj. imati će redaka koliko i matrica A i stupaca koliko i matrica B.

Formula za računanje elemenata matrice C je.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Uočimo, da bismo dobili element matrice C na mjestu (i, j) koristimo se i-tim retkom matrice A i $j - tim$ stupcem matrice B. Množimo redom elemente retka i stupca te zbrojimo sve umnoške.

Primjer 2.2. *Neka su dane matrice* $A = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ *i* $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$. *Izračunajmo matricu* C*, gdje je* $C = A \cdot B$.

Rješenje.

Odredimo tip matrice C.

$A \in M_{2\times2}$, $B \in M_{2\times1}$, *pa je* $C \in M_{2\times1}$, *tj.* C *je oblika* $C = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{bmatrix}$.

Još je potrebno odrediti brojeve c_{11}, c_{21}. *Za izračunati element* c_{11} *uzimamo prvi redak matrice* A *i prvi stupac matrice* B, *a za element* c_{21} *uzimamo drugi redak matrice* A *i prvi stupac matrice* B.

$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} = 7 \cdot 1 + 5 \cdot (-4) = -13$
$c_{21} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} = 0 \cdot 1 + 2 \cdot (-4) = -8$
Dobili smo $C = \begin{bmatrix} -13 \\ -8 \end{bmatrix}$.

Zadatak 2.17. *Neka su dane matrice* $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & -6 & 5 \end{bmatrix}$ *i* $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$.
Odredite matice $C = A \cdot B$ *i* $D = B \cdot A$.

Rješenje.
Odredimo tip matrice C. *Ona ima redaka koliko i matrica A, stupaca koliko i matrica* B. *Znači,* $C \in M_{2\times2}$, *tj.* C *je oblika:*

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}.$$

$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} = 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 = 6 - 4 = 2$
$c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} = 3 \cdot 0 + 4 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-3) = 0 - 8 + 3 = -5$
$c_{21} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} = 2 \cdot 2 + (-6) \cdot (-1) + 5 \cdot 0 = 4 + 6 = 10$
$c_{22} = a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} = 2 \cdot 0 - 6 \cdot (-2) + 5 \cdot (-3) = 12 - 15 = -3$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 10 & -3 \end{bmatrix}.$$

Odredimo sada tip matrice $D = B \cdot A$. *Ona ima redaka koliko i matrica* B, *stupaca koliko i matrica A, znači,* 3 *retka i* 3 *stupca.* $D \in M_{3\times3}$.

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix}$$

$d_{11} = b_{11} \cdot a_{11} + b_{12} \cdot a_{21} = 2 \cdot 3 + 0 \cdot 2 = 6$
$d_{21} = b_{21} \cdot a_{11} + b_{22} \cdot a_{21} = (-1) \cdot 3 + (-2) \cdot 2 = -7$
$d_{31} = b_{31} \cdot a_{11} + b_{32} \cdot a_{21} = 0 \cdot 3 + (-3) \cdot 2 = -6$
$d_{12} = b_{11} \cdot a_{12} + b_{12} \cdot a_{22} = 2 \cdot 4 + 0 \cdot (-6) = 8$

$d_{22} = b_{21} \cdot a_{12} + b_{22} \cdot a_{22} = (-1) \cdot 4 - 2 \cdot (-6) = 8$
$d_{32} = b_{31} \cdot a_{12} + b_{32} \cdot a_{22} = 0 \cdot 4 + (-3) \cdot (-6) = 18$
$d_{13} = b_{11} \cdot a_{13} + b_{12} \cdot a_{23} = 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 5 = -2$
$d_{23} = b_{21} \cdot a_{13} + b_{22} \cdot a_{23} = (-1) \cdot (-1) + (-2) \cdot 5 = -9$
$d_{33} = b_{31} \cdot a_{13} + b_{32} \cdot a_{23} = 0 \cdot (-1) + (-3) \cdot 5 = -15$

Dobili smo matricu D:

$$D = \begin{bmatrix} 6 & 8 & -2 \\ -7 & 8 & -9 \\ -6 & 18 & -15 \end{bmatrix}.$$

Ovaj primjer pokazuje da množenje matrica nije komutativno, tj. $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Zadatak 2.18. *Izračunajte* $A \cdot B$ *i* $B \cdot A$ *ako su dane matrice* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ *i* $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Rješenje.
Računajmo prvo $C = A \cdot B$. *Kako je* $C \in M_{1\times 1}$, *vidimo* $C = (c_{11})$.
$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) = -5.$

$$C = [-5].$$

Izračunajmo sada $D = B \cdot A$. *Matrica* D *je* 3×3 *matrica.*

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 10 \\ -1 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 2.19. *Dane su matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 4 \end{bmatrix} \text{ i } D = \begin{bmatrix} 12 \end{bmatrix}.$$

a) *Odredite tipove svih matrica.*

b) *Napišite jediničnu matricu istog reda kao i A.*

c) *Odredite element* a_{32}.

d) *Izračunajte* $A \cdot C^T$.

e) *Izračunajte* $B^T - 3C$.

f) *Izračunajte* $I \cdot A$.

Rješenje.

a) $A \in M_{3\times3},\ B \in M_{3\times1},\ C \in M_{1\times3},\ D \in M_{1\times1}$.

b) $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $a_{32} = 2$

d) $AC^T = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 5 \cdot 5 + 0 \cdot 4 \\ -2 \cdot 0 - 1 \cdot 5 + 4 \cdot 4 \\ 0 \cdot 0 + 2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 11 \\ -2 \end{bmatrix}$

e) $B^T - 3C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 0 & 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -14 & -13 \end{bmatrix}$

f) $I \cdot A = A$.

Napomena: Općenito vrijedi $A \cdot I = A$ *i* $A \cdot I = A$.

Zadatak 2.20. *Dane su matrice* $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ *i* $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ *i neka je* $C = A \cdot B$. *Odredite element* c_{11}.

Rješenje.

$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} = 5 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) = 5 - 3 = 2.$

Zadatak 2.21. *Izračunajte* $A \cdot B \cdot C$ *ako su nam dane matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 6 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \ i\ C = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rješenje.

$A \cdot B \cdot C = \begin{bmatrix} 20 & -6 & 0 \end{bmatrix}$.

Zadatak 2.22. *Izračunajte $A \cdot B$ i $B \cdot A$ ako su dane matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Rješenje.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} -9 \end{bmatrix}, B \cdot A = \begin{bmatrix} -15 & -10 & -5 \\ -3 & -2 & -1 \\ 24 & 16 & 8 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 2.23. *Izračunajte $C(A-B)$ ako su dane matrice* $A = \begin{bmatrix} 12 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 0 & 0 \\ 10 & 1 & 13 & 6 \\ 7 & 8 & 2 & -1 \end{bmatrix}$,

$$B = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 5 & 0 \\ 4 & -7 & 2 & -1 \\ 7 & 4 & 11 & 5 \\ 5 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rješenje.

Izračunajmo najprije $A - B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

I sada množimo $C(A - B) = \begin{bmatrix} 12 & 4 & -15 & 7 \\ -3 & 1 & 9 & -2 \end{bmatrix}$.

Zadatak 2.24. *Izračunajte*

a) $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ *Rj.* : $\begin{bmatrix} -7 & -4 \\ -10 & -6 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$ *Rj.* : $\begin{bmatrix} -2 & -9 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & -5 & 0 \\ 0 & -4 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ *Rj.* : $\begin{bmatrix} 6 & 2 & 5 \\ -2 & -6 & -1 \\ 0 & -6 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 4 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 7 & 7 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ *Rj.* : $\begin{bmatrix} -26 & -33 \\ 8 & 18 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ *Rj.* : $\begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$.

2.2 Determinanta

Determinanta je funkcija koja svakoj kvadratnoj matrici pridružuje skalar odnosno broj. Determinanta se definira induktivno, to jest tj. determinanta matrice n-tog reda definira se pomoću determinante matrice $(n-1)$-og reda.

- Determinanta 1×1 matrice $A = [a]$ je broj a,to jest

$$\det A = |a| = a$$

- Za $n \times n$ matricu $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ (gdje je $n > 1$) determinantu računamo Laplaceovim razvojem:

U La Placeovom razvoju prvo proizvoljno odaberemo redak ili stupac po kojem ćemo razvijati determinantu.Formula za računanje determinante po $i-tom$ retku, odnosno $j-tom$ stupcu je:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \text{ ...razvoj po i-tom retku,}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, \text{...razvoj po j-tom stupcu,}$$

gdje je A_{ij} algebarski komplement matrice A,tj.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij},$$

gdje je Δ_{ij} determinanta matrice A iz koje izostavimo i-ti redak i j-ti stupac.

Primjer 2.3. *Izračunajmo determinantu matrice* $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$.

Razvijmo determinantu po prvom retku.
$det \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 9 & 2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 9 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1)^{1+1} \cdot |2| + 3 \cdot (-1)^{1+2} \cdot |9| = 8 - 27 = -19.$

Razvijmo sada determinantu po drugom retku.

$$det \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 9 & 2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 9 & 2 \end{vmatrix} = 9 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 \end{vmatrix} = -27 + 8 = -19.$$

Razvijmo sada determinantu po prvom stupcu.

$$det \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 9 & 2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 9 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 \end{vmatrix} + 9 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 \end{vmatrix} = 8 - 27 = -19.$$

Istu vrijednost determinante dobili bismo da smo ju razvijali po drugom stupcu. Probajte sami!

Zadatak 2.25. *Izračunajte determinantu matrice* $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$.

Rješenje.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} &= 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\
&= 2(3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot 3 + 4 \cdot (-1)^{1+2} \cdot 2) - 5(1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot 3 + 4 \cdot (-1)^{1+2} \cdot 3) + \\
&\quad + (1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot 2 + 3 \cdot (-1)^{1+2} \cdot 3) \\
&= 2(9 - 8) - 5(3 - 12) + 2 - 9 \\
&= 2 + 45 - 7 \\
&= 40.
\end{aligned}$$

Zadatak 2.26. *Izračunajte determinantu matrice* $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix}$.

Rješenje.
Razvijmo determinantu po prvom retku.

$$\begin{aligned}
\det A &= -1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\
&= -1(-10 - 6) + (-2)(-25 - 12) + (10 - 8) = \\
&= 16 + 74 + 2 = 92.
\end{aligned}$$

Zadatak 2.27. *Izračunajte determinantu matrice* $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$.

Rješenje.

Ovu determinantu razvijat ćemo po drugom retku jer drugi redak sadrži nulu, što znači jedan član manje u razvoju (analogno i po drugom stupcu).

$$\det A = 1(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} + 0 + (-5)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} =$$
$$= -1(-8+4) + 5(-4-4) = -36.$$

Pravila vezana uz računanje determinanti

- $detA = detA^T$.
- Ako B dobijemo tako da matrici A zamijenimo bilo koja dva retka ili stupca, tada je $detB = -detA$.
- Ako matricu B dobijemo tako da joj jedan redak ili stupac pomnožimo brojem λ, tada je $detB = \lambda detA$.
- Ako je A $n \times n$ matrica, tada je $\det(\lambda A) = \lambda^n det(A)$.
- Ako je B dobivena iz A dodavanjem jednog retka ili stupca drugome, tada je $detB = detA$.
- Množenjem jednog retka/stupca brojem i dodavanjem drugome, ne mijenja se detrminanta
- Ako matrica A ima nul-redak ili nul-stupac, tada je $detA = 0$.
- Ako matrica A ima dva ista retka ili dva ista stupca, tada je $detA = 0$.
- **Binet-Cauchyevo pravilo:** Ako su A i B kvadratne matrice istog reda, onda je $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Zadatak 2.28. *Izračunajte determinante matrica A i B pri čemu je*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \text{ i } B = 3A.$$

Rješenje.

Izračunajmo determinantu matrice A. Primjetimo da ako pomnožimo prvi redak sa (-2) i dodamo ga drugom retku, drugi će redak postati nul-redak. Determinanta je tada 0. Kako znamo da se dodavanjem jednog retka drugome u matrici determinanta ne mijenja, dobivamo da je i determinanta matrice

A jednaka 0.
Dalje, izračunajmo determinantu matrice B.

$$detB = det(3A) = 3^3 detA = 3^3 \cdot 0 = 0.$$

Za računanje determinanti matrica tipa 2×2 i tipa 3×3 postoje brži i efikasniji načini. Prvo ćemo pokazati brži način za izračun determinanti matrica tipa 2×2.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Longrightarrow detA = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Za 3×3 matrice koristimo Sarrusovo pravilo.

$$\begin{aligned} detA = & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \\ & = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - \\ & \quad - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}. \end{aligned}$$

Metodu je lakše zapamtiti tako da uz matricu A zapišemo njena prva dva stupca.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Tada množimo elemente po dijagonalama i zbrajamo one umnoške koji su dobiveni iz umnožaka elemenata dijagonala s lijeva na desno, a oduzimamo one umnoške koji su dobiveni iz umnožaka elemnata dijagonala s desna na lijevo (suprotne dijagonale).

Zadatak 2.29. *Izračunajte determinantu matrice* $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Rješenje.

$$\begin{aligned} detA = & \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{matrix} \\ & = 0 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 0 \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 2 \\ & = 0 + 12 + 2 - 2 - 0 - 0 \\ & = 12. \end{aligned}$$

Zadatak 2.30. *Izračunajte determinantu matrice* $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Rješenje.
Determinantu matrice je najbolje razvijati po retku (ili stupcu) sa najviše nula. Ovdje je to prvi redak.

$$detA = 0 + 0 + 3 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Izračunajmo posebno ove dvije determinante.

$$\begin{aligned} \left|\begin{matrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{matrix} &= 1 \cdot 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \\ &= -2 + 6 + 2 + 2 - 1 - 12 \\ &= -5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left|\begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{matrix} &= 1 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 0 \cdot 2 \cdot 3 \\ &= 5. \end{aligned}$$

Nastavljamo sa zadatkom.

$$detA = 3 \cdot (-1)^{1+3} \cdot (-5) + 5 \cdot (-1)^{1+4} \cdot 5 = -40.$$

Determinante gornjetrokutastih, donjetrokutastih i dijagonalnih matrica lako računamo množeći elemente dijagonale. Pogledajmo to na idućem primjeru.

Zadatak 2.31. *Izračunajte determinantu matrice* $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 15 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Rješenje.
Determinantu rješavamo pomoću Sarrusovog pravila.

$$
\begin{aligned}
detA &= \left|\begin{matrix} 3 & -1 & 15 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\
&= 3\cdot 2\cdot 1 + (-1)\cdot 7\cdot 0 + 15\cdot 0\cdot 0 - (-1)\cdot 0\cdot 1 - 3\cdot 7\cdot 0 - 15\cdot 2\cdot 0 \\
&= 3\cdot 2\cdot 1 \\
&= 6.
\end{aligned}
$$

Vidimo da je jedini umnožak koji nije jednak nuli, umnožak elemenata dijagonale matrice A.

Lako je naći determinantu pomoću La Placeovog razvoja po trećem retku jer u razvoju je samo jedan član različit od nule.

$\det A = 0 + 0 + 1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 0 = 6.$

Zadatak 2.32. *Izračunajte determinante matrica:*

a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ *Rj.* : -6

b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ *Rj.* : 51

c) $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 9 \\ 1 & 1 & 17 \\ 3 & 3 & 15 \end{bmatrix}$ *Rj.* : 0

d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 11 & 22 & 33 \\ 0 & 4 & 44 & 55 \\ 0 & 0 & 4 & 66 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *Rj.* : 16.

e) $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 4 & 44 & 55 \\ 22 & 0 & 4 & 66 \\ 5 & 4 & -6 & 1 \end{bmatrix}$ *Rj.* : 0.

Zadatak 2.33. *Izračunajte determinantu matrice* $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 6 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Rješenje.

Primjetimo da nas gornja matrica podsijeća na gornjetrokutastu, a zamjenom prva dva retka to bi baš i bila gornjetrokuatasta matrica, pa ćemo zamijeniti prva dva retka jer to mijenja samo predznak determinante,a znatno nam olakšava računanje.

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 6 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 5 & 0 & 6 & 7 & 9 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 3 = -630.$$

Zadatak 2.34. *Izračunajte determinantu matrice $C = A \cdot B$, ako je*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & -9 \end{bmatrix}.$$

Rješenje.
Za izračunati determinantu matrice C možemo ili prvo pomnožiti matrice A i B pa tražiti determinantu, ili iskoristiti pravilo (Binet-Cauchy) $det(A \cdot B) = detA \cdot detB$.

$$detA = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 - 4 \cdot (-2) = 8.$$

$$detB = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & -9 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-9) - (-3) \cdot 5 = -9 + 15 = 6.$$

$$detC = det(A \cdot B) = detA \cdot detB = 8 \cdot 6 = 48.$$

Zadatak 2.35. *Izračunajte determinantu matrice $C = A \cdot B$, ako su nam dane matrice $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$.*

Rješenje.

Sada ne možemo iskoristiti pravilo $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$ jer računamo samo determinante kavadratnih matrica. Zato ćemo prvo pomnožiti matrice $A \cdot B$.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \end{bmatrix}.$$

Za računanje determinante koristit ćemo Sarrusovo pravilo.

$$\begin{aligned}\det(A\cdot B) &= \begin{vmatrix}4 & 5 & 6\\ 8 & 10 & 12\\ 12 & 15 & 18\end{vmatrix}\begin{matrix}4 & 5\\ 8 & 10\\ 12 & 15\end{matrix}\\ &= 4\cdot 10\cdot 18+5\cdot 12\cdot 12+6\cdot 8\cdot 15-5\cdot 8\cdot 18-4\cdot 12\cdot 15-6\cdot 10\cdot 12=0.\end{aligned}$$

Zadatak 2.36. *Ako je* $A=\begin{bmatrix}3 & 3 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 0 & 1\\ -3 & 2\end{bmatrix}$ *, izračunajte determianantu matrice* $A\cdot B$ *.*

Rješenje.

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}3 & 3 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 2\\ 0 & 1\\ -3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 7\\ -6 & 5\end{bmatrix}.$$

$$\det(A\cdot B)=\begin{vmatrix}9 & 7\\ -6 & 5\end{vmatrix}=87.$$

Zadatak 2.37. *Neka je dana matrica* $A=\begin{bmatrix}4 & 2 & 7\\ 3 & a & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$*. Odredite* a*, ako je* $\det A=10$.

Rješenje.
Raspišimo determinantu matrice A*. Pomoću toga ćemo doći do elementa* a*.*

$$\begin{aligned}detA &= \begin{vmatrix}4 & 2 & 7\\ 3 & a & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}\begin{matrix}4 & 2\\ 3 & a\\ 1 & 1\end{matrix}\\ &= 4\cdot a\cdot 1+2\cdot 1\cdot 1+7\cdot 3\cdot 1-2\cdot 3\cdot 1-4\cdot 1\cdot 1-7\cdot a\cdot 1\\ &= 4a+2+21-6-4+(-7a)\\ &= -3a+13.\end{aligned}$$

Kako znamo da je $detA=10$*, dobivamo jednadžbu*

$$-3a+13=10.$$

Iz čega dobivamo

$$-3a=10-13$$

$$-3a=-3/:(-3)$$

$$a=1.$$

Zadatak 2.38. *Neka je* $A = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix}$. *Odredi* x *ako je* $\det(A+B) = -1$

Rješenje.

$A + B = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & x \\ x+2 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\det(A+B) = 2 - x^2 - 2x$$

$$2 - x^2 - 2x = -1$$

$$-x^2 - 2x + 3 = 0.$$

Da bismo odredili x *moramo riješiti gornju kvadratnu jednadžbu.*

Rješenja kvadratne jednadžbe oblika $ax^2 + bx + c = 0$ *nalazimo pomoću formule*

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

U našem zadatku $a = -1, b = -2, c = 3$.

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3}}{2 \cdot (-1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{-2} = \frac{2 \pm 4}{-2}$$

$$x_1 = \frac{2+4}{-2} = \frac{6}{-2} = -3, \qquad x_2 = \frac{2-4}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1.$$

Imamo dva rješenja: $x_1 = -3$ *i* $x_2 = 1$.

2.3 Inverzna matrica

Matrica B je inverzna kvadratnoj matrici A reda $n \times n$ ako je $A \cdot B = B \cdot A = I$. Inverz matrice A označavamo s A^{-1}. Matrica A ima inverznu matricu ako je $detA \neq 0$. Kada $detA \neq 0$ kažemo da je matrica A **regularna.** U suprotnom, kažemo da je matrica **singularna**.
Inverznu matricu matrice A računamo pomoću formule

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} A^*$$

gdje je A^* adjunkta matrice A, tj.

$$(A^*)_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ji},$$

i $detA_{ji}$ je determinanta matrice A kojoj smo ispustili j-ti redak i i -ti stupac. Na primjeru ćemo bolje objasniti postupak.

Primjer 2.4. *Odredimo inverznu matricu matrice* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

1. *Najprije provjeravamo je li matrica regularna. Ako matrica nije regularna, znamo da nema inverz, ako je, nastavljamo s računanjem inverza.*
$$detA = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2 \neq 0.$$
Matrica A ima inverz.

2. *Računamo adjunktu.*
$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$
$A_{11} = (-1)^{1+1} det(4) = 4 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} det(2) = -2$
$A_{21} = (-1)^{2+1} det(3) = -3 \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} det(1) = 1.$

3. *Zapišemo inverznu matricu*
$$A^{-1} = \frac{1}{detA} A^* = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Za primjer ćemo provjeriti je li zbilja izračunata A^{-1} inverzna matrica matrice A. Treba vrijediti $A^{-1}A = I$, odnosno $AA^{-1} = I$.

$$A^{-1}A = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Analogno dobivamo:

$$A \cdot A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 2.39. *Odredite inverz matrice* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Rješenje.
Provjeravamo determinantu matrice.
$detA = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 1 \Rightarrow$ *matrica ima inverz. Računamo adjunktu.*

$A_{11} = (-1)^{1+1}det(1) = 1 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}det(0) = 0$
$A_{21} = (-1)^{2+1}det(2) = -2 \qquad A_{12} = (-1)^{2+2}det(1) = 1$

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 2.40. *Odredite inverz matrice* $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Rješenje.
Provjeravamo je li determinanta različita od nule.

$$\begin{aligned} detA &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix} \\ &= 3 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= 6 + 1 + 2 - 1 - 3 - 4 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Matrica A ima inverz. Dalje, tražimo adjunktu.

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$

$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 2.41. *Odredite inverz matrice* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & -2 & 1 \\ -5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Rješenje.

$$detA = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & -1 \\ -5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

Adjunkta:

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$ $\quad$ $A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$

$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ $\quad$ $A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = 2$

$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = -1$ $\quad$ $A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = -1$

$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = -3$ $\quad$ $A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = -1$

$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = -2$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 2.42. *Odredite inverz matrice* $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & -2 \end{bmatrix}$.

Rješenje.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

2.4 Matrične jednadžbe

Primjer 2.5. *Odredimo x, y, z ako je*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Množenjem matrica i iz jednakosti matrica dobivamo

$$2x + y - z = 6$$

$$2y = 2$$

$$x - z = 4$$

Iz druge jednadžbe dobivamo $y = 1$ te uvrstimo u prvu i treću jednadžbu.

$$2x - z = 5$$

$$x - z = 4$$

Iz treće jednadžbe izlučimo x i dobijemo $x = 4 + z$. Sada $x = 4 + z$ uvrstimo u prvu jednadžbu.

$$2(z + 4) - z = 5$$

$$z = -3$$

dobivamo $x = 4 - 3 = 1$.

Matrične jednadžbe su jednadžbe gdje se kao nepoznanice (i poznanice) javljaju matrice. Proučit ćemo tri oblika matričnih jednadžbi:

1. $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$

   Jednadžbu rješavamo na način da s lijeve strane množimo izraz sa A^{-1} kako bismo došli do X :

   $A^{-1}AX = A^{-1}B$

   $IX = A^{-1}B$

   $X = A^{-1}B.$

2. $\mathbf{XA = B}$

   Jednadžbu rješavamo na način da s desne strane množimo jednadžbu sa A^{-1} kako bismo došli do X :

   $XAA^{-1} = BA^{-1}$

   $XI = BA^{-1}$

   $X = BA^{-1}$.

3. $\mathbf{AXB = C}$

   S lijeve množimo jednadžbu sa A^{-1}, a s desne strane sa B^{-1}

   $A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}CB^{-1}$

   $I \cdot X \cdot I = A^{-1}CB^{-1}$

   $X = A^{-1}CB^{-1}$.

Primjer 2.6. *Riješimo jednadžbu* $AX = B$ *gdje su* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ *i* $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$.

Najprije pokažimo kako rješavanje ove jednadžbe možemo svesti na rješavanje četiri linearne jednadžbe.

Imamo $AX = B \implies \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$.

Pomnožimo matrice A i X $\begin{bmatrix} x_{11} + 2x_{21} & x_{12} + 2x_{22} \\ x_{11} + 3x_{21} & x_{12} + 3x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$.

Izjednačavamo elemente na istim mjestima,

$$\begin{aligned} x_{11} + 2x_{21} &= 2 \\ x_{12} + 2x_{22} &= 2 \\ x_{11} + 3x_{21} &= 4 \\ x_{12} + 3x_{22} &= 6.. \end{aligned}$$

Riješimo ove jednadžbe i dobivamo da je $x_{11} = -2, x_{12} = -6, x_{21} = 2, x_{22} = 4$, *odnosno matrično:*

$$X = \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Pokažimo sada kako ćemo rješavati ovakve jednadžbe.

$$\begin{aligned} &AX = B \\ &A^{-1}/AX = B \\ &X = A^{-1}B. \end{aligned}$$

Za izračunati X moramo izračunati matricu A^{-1} i pomnožiti ju s matricom B.

Računamo matricu A^{-1} :

$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = 1.$

$A_{11} = (-1)^{1+1}|3| = 3 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}|2| = -2$

$A_{21} = (-1)^{1+2}|1| = -1 \qquad A_{22} = (-1)^{2+2}|1| = 1.$

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sada možemo izračunati X

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Kada bismo rješavali jednadžbu $XA = B$, kao rješenje dobili bismo $X = BA^{-1}$.

$X = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}.$

Zadatak 2.43. *Dane su matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$ i $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. Riješite jednadžbu $XA + B = C$.*

Rješenje.

Kao i u svakoj jednadžbi, moramo izraziti nepoznanicu, ovdje matricu X.

$$XA + B = C$$
$$XA = C - B \quad \backslash A^{-1}$$
$$X = (C - B)A^{-1}.$$

Za izračunati X moramo izračunati matrice A^{-1} i $C - B$.

Računamo A^{-1} :

$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$

$A_{11} = (-1)^{1+1}|0| = 0 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}|2| = -2$

$A_{21} = (-1)^{2+1}|1| = -1 \qquad A_{22} = (-1)^{2+2}|3| = 3$

$$A^{-1} = \tfrac{1}{-2} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C - B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$$

Dobivamo rješenje

$$X = (C-B)A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -14 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 2.44. *Uz iste matrice A, B, C kao u prethodnom zadatku, riješite matričnu jednadžbu $AX + B = C$.*

Rješenje.

$$\begin{aligned} &AX + B = C \\ &A^{-1}/AX = C - B \\ &X = A^{-1}(C-B). \end{aligned}$$

Iskoristimo rezultate iz prethodnog zadatka, jer već smo izračunali A^{-1} i $C - B$.

$$X = A^{-1}(C-B) = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ \frac{3}{2} & -14 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 2.45. *Dane su matrice* $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$. *Riješite jednadžbu $AX + 2X = B$.*

Rješenje.

$$\begin{aligned} &AX + 2X = B \\ &(A+2I)^{-1} \quad / \quad (A+2I)X = B \\ &X = (A+2I)^{-1}B. \end{aligned}$$

Za izračunati X trebamo najprije izračunati matricu $(A+2I)^{-1}$.

$A + 2I = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}.$

$\det(A+2I) = -1 \Longrightarrow$ *matrica $A+2I$ ima inverz.*

Računamo inverz

$(A+2I)_{11} = (-1)^{1+1}|6| = 6 \qquad (A+2I)_{12} = (-1)^{1+2}|1| = -1$

$(A+2I)_{21} = (-1)^{2+1}|-5| = 5 \qquad (A+2I)_{22} = (-1)^{2+2}|-1| = -1$

$$(A+2I)^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dobivamo rješenje

$X = (A+2I)^{-1}B = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 7 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -15 \\ 7 & -13 \end{bmatrix}.$

Zadatak 2.46. *Riješite jednadžbu* $AXB = C$ *ako su dane matrice* $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ *i* $C = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Rješenje.
Izrazimo X.

$$A^{-1}/ \qquad AXB = C \qquad \backslash B^{-1}$$
$$X = A^{-1}CB^{-1}$$

Moramo naći A^{-1} *i* B^{-1} *te pomnožiti* $A^{-1}CB^{-1}$.

$\det A = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}|1| = 1 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}|0| = 0$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1}|0| = 0 \qquad A_{22} = (-1)^{2+2}|2| = 2$$
$$A^{-1} = \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\det B = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} = -2$

$$B_{11} = (-1)^{1+1}|-2| = -2 \qquad B_{12} = (-1)^{1+2}|1| = -1$$
$$B_{21} = (-1)^{1+2}|-2| = 2 \qquad B_{22} = (-1)^{2+2}|2| = 2$$
$$B^{-1} = \tfrac{1}{-2} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Dobivamo rješenje

$$X = A^{-1}CB^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{5}{4} \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

Zadatak 2.47. *Dane su matrice* $A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & -3 \end{bmatrix}$ *i* $C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. *Riješite jednadžbu* $AX = BX + C - I$.

Rješenje.
Najprije izrazimo X.

$$AX - BX = C - I$$
$$(A - B)^{-1} \quad / \quad (A - B)X = C - I$$
$$X = (A - B)^{-1}(C - I)$$

Za izračunati X trebamo izračunati: $A-B$, $(A-B)^{-1}, (C-I)$. Krenimo redom

$$A-B=\begin{bmatrix} 7 & 3 & 0\\ 2 & 6 & 4\\ -1 & 1 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 6 & 5 & -1\\ 2 & 3 & 0\\ -3 & 3 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1\\ 0 & 3 & 4\\ 2 & -2 & 5\end{bmatrix}.$$

$$\det(A-B)=\det\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1\\ 0 & 3 & 4\\ 2 & -2 & 5\end{bmatrix}=1.$$

$$(A-B)_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 4\\ -2 & 5\end{vmatrix}=23 \qquad (A-B)_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -2 & 1\\ -2 & 5\end{vmatrix}=8$$

$$(A-B)_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -2 & 1\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-11 \qquad (A-B)_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 4\\ 2 & 5\end{vmatrix}=8$$

$$(A-B)_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 2 & 5\end{vmatrix}=3 \qquad (A-B)_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 0 & 4\end{vmatrix}=-4$$

$$(A-B)_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 3\\ 2 & -2\end{vmatrix}=-6 \qquad (A-B)_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -2\\ 2 & -2\end{vmatrix}-2$$

$$(A-B)_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -2\\ 0 & 3\end{vmatrix}=3$$

$$(A-B)^{-1}=\frac{1}{1}\begin{bmatrix} 23 & 8 & -11\\ 8 & 3 & -4\\ -6 & -2 & 3\end{bmatrix}$$

$$C-I=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 2\\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix}$$

Dobivamo rješenje

$$X=(A-B)^{-1}(C-I)=\begin{bmatrix} 23 & 8 & -11\\ 8 & 3 & -4\\ -6 & -2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 2\\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 24 & -49 & 39\\ 8 & -18 & 14\\ -6 & 13 & -10\end{bmatrix}$$

Zadatak 2.48. *Dane su matrice* $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2\\ -1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ 3 & -1 & 1\end{bmatrix}$ *i*

$C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3\\ -4 & 2 & 3\\ 6 & 1 & 1\end{bmatrix}$. *Riješite jednadžbu* $AX+B-C=0$.

Rješenje.

Izrazimo $X = A^{-1}(C - B)$.

Potrebno je izračunati matrice A^{-1} *i* $C - B$.

$C - B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -4 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

Dobivamo rješenje

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -4 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -3 & 2 \\ -16 & -5 & 3 \\ 19 & 7 & -3 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 2.49. *Riješite matričnu jednadžbu* $3X - XA = B$ *ako su dane matrice* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ *i* $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

Rješenje.

$3X - XA = B$
$X(3I - A) = B$
$X = B(3I - A)^{-1}$

$3I - A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

Računamo inverznu matricu matrice $3I - A$.

$(3I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Dobivamo rješenje

$$X = B(3I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 11 & -16 & 5 \\ 7 & -\frac{17}{2} & 3 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 2.50. *Dane su matrice* $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ *i* $B = \begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 20 & 5 \end{bmatrix}$. *Riješite jednadžbu* $2XA - X = B$.

Rješenje.

$2XA - X = B.$
$X(2A - I) = B$
$X = B(2A - I)^{-1}$

$2A - I = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

Izračunamo inverz matrice $2A - 3I$

$(2A - 3I)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{15} & -\frac{1}{15} \end{bmatrix}$

Dobivamo rješenje

$$X = B(2A - I)^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 20 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{15} & -\frac{1}{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} \\ \frac{14}{3} & \frac{23}{3} \end{bmatrix}.$$

Zadatak 2.51. *Dane su matrice* $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ *i* $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$. *Riješite jednadžbu* $AX + B = 2B - I$.

Rješenje.

$AX + B = 2B - I.$
$AX = 2B - I - B$
$AX = B - I$
$X = A^{-1}(B - I)$

Računamo matrice A^{-1}*i* $B - I$.

$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$B - I = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

Dobivamo rješenje

$$X = A^{-1}(B - I) = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 4 \\ -6 & -1 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 2.52. *Riješite jednadžbu* $AX^{-1} = B$ *ako su dane matrice* $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ *i* $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Rješenje.

$AX^{-1} = B \setminus X$
$A = BX \iff BX = A$
$X = B^{-1}A$
$B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

Dobivamo rješenje

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Zadatak 2.53. *Riješite jednadžbu* $X^{-1} + (AX)^{-1} = B$, *ako su dane matrice* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ *i* $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Rješenje.
Iz ove jednadžbe moramo izraziti X.

$X^{-1} + (AX)^{-1} = B$
$X^{-1} + X^{-1}A^{-1} = B$
$X^{-1}(I + A^{-1}) = B$
$X \quad / \quad X^{-1}(I + A^{-1}) = B$
$(I + A^{-1}) = XB$
$(I + A^{-1})B^{-1} = X$

Dakle, za izračunati X *trebamo izračunati* $(I + A^{-1})$ *i* $B^{-1.}$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$I + A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Dobivamo rješenje

$$X = (I + A^{-1})B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 2.54. *Izrazite X:*

a) $AX - B = (X^{-1}C)^{-1}$

b) $X^{-1}B - C = (DX)^{-1}$

c) $AX + 3X = C + BX$

d) $X^{-1} + 2B = (AX)^{-1}$

Rješenje.

a) $AX - B = (X^{-1}C)^{-1}$

$$AX - C^{-1}X = B$$
$$(A - C^{-1})X = B$$
$$X = (A - C^{-1})^{-1}B$$

b) $X^{-1}B - C = (DX)^{-1}$

$$X^{-1}B - X^{-1}D^{-1} = C$$
$$X/ \qquad X^{-1}(B - D^{-1}) = C$$
$$(B - D^{-1}) = CX$$
$$X = C^{-1}(B - D^{-1})$$

c) $AX + 3X = C + BX$

$$AX + 3X - BX = C$$
$$(A + 3I - B)X = C$$
$$X = (A + 3I - B)^{-1}C$$

d) $X^{-1} + 2B = (AX)^{-1}$

$$X^{-1} + 2B = X^{-1}A^{-1}$$
$$X^{-1} - X^{-1}A^{-1} = -2B$$
$$X/ \qquad X^{-1}(I - A^{-1}) = -2B$$
$$(I - A^{-1}) = X(-2B) \qquad \backslash(-2B)^{-1}$$
$$X = (I - A^{-1})(-2B)^{-1}.$$

2.5 Sustavi linearnih jednadžbi

2.5.1 Različite metode rješavanja sustava jednadžbi

U ovom poglavlju upoznat ćemo se s matričnim pristupom rješavanja sustava jednadžbi. No, prvo, prisjetimo se metoda rješavanja sustava linearnih jednadžbi koje smo upoznali kroz osnovnu i srednju školu, a to su metoda supstitucije, metoda suprotnih koeficijenata i grafička metoda.

Primjer 2.7. *Riješimo sustav jednadžbi*

$$\begin{aligned} x + 5y &= 7 \\ 2x - y &= 3 \end{aligned}$$

Metode rješavanja:

1) ***Metoda susptitucije***

Iz jedne jednadžbe izrazimo nepoznanicu (x ili y) i uvrstimo u drugu jednadžbu i dobivamo jednu jednadžbu sa jednom nepoznanicom.

$$\begin{aligned} x + 5y &= 7 \Longrightarrow x = 7 - 5y \\ 2x - y &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(7-5y) - y &= 3 \\ 14 - 10y - y &= 3 \\ -11y &= -11 \\ y &= 1 \\ x &= 7 - 5y = 7 - 5 = 2 \end{aligned}$$

Dobili smo rješenje $(x, y) = (2, 1)$.

2) Metoda suprotnih koeficijenata

Množenjem i zbrajanjem jednadžbi nastojimo eliminirati jednu nepoznanicu.

$$\begin{aligned} x + 5y &= 7 \\ 2x - y &= 3 \end{aligned}$$

Ako prvu jednadžbu pomnožimo s -2 i dodamo drugoj, iz druge jednadžbe ćemo eliminirati x

$$\begin{aligned} 2x - y - 2x - 10y &= 3 - 14 \\ -11y &= -11 \\ y &= 1 \\ \\ x + 5 &= 7 \\ x &= 2. \end{aligned}$$

Ako smo se pak odlučili eliminirati y, to možemo najednostavnije učiniti tako da drugu jednadžbu pomnožimo s 5 i dodamo prvoj.

$$\begin{aligned} x + 5y + 10x - 5y &= 7 + 15 \\ 11x &= 22 \\ x &= 2 \\ \\ 2 + 5y &= 7 \\ y &= 1. \end{aligned}$$

Zadatak 2.55. *Riješite sustave jednadžbi*

a) $3x + 4y = 2$

$x - 3y = 5$

(Rj.: $(x, y) = (2, -1)$)

b) $2x - y = 7$

$3x = 8 + 2y$

(Rj.: $(x, y) = (6, 5)$)

c) $x = y + 7$

$x = 3y + 5$

(Rj.: $(x, y) = (8, 1)$).

3. **Grafička metoda**

Svaka jednadžba predstavlja pravac, a rješenje sustava jednadžbi je sjecište tih pravaca.

Primjer 2.8. *Riješimo sustav linearnih jednadžbi*

$x + 2y = 4$
$x - 2y = 0$

Svaka od ove dvije jednadžbe predstavlja jednadžbu pravca. Tražimo točku gdje se ta dva pravca sijeku (podudaraju), tj. tražimo rješenje sustava.

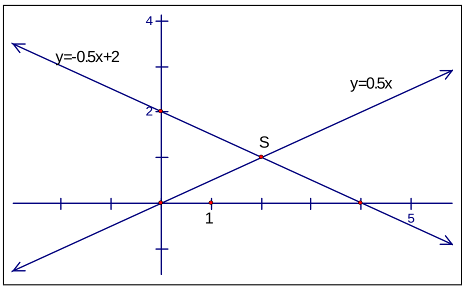
Nacrtamo pravce

$y = -\frac{1}{2}x+2$

x	0	4
y	2	0

$x-2y = 0$

x	0	2
y	0	1



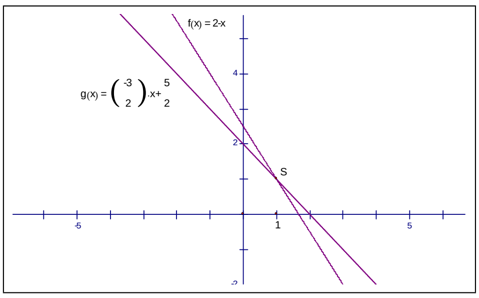
Sjecište pravaca je točka $S(2,1)$ koja predstavlja i rješenje sustava jednadžbi, pa dobivamo $x = 2, y = 1$.

Primjer 2.9. *Riješimo sustav*

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ 3x + 2y &= 5 \end{aligned}$$

Rješenje.

Nacrtamo pravce koji predstavljaju jednadžbe. To su pravci $y = 2 - x$ i $y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$.



Sjecište pravaca je u točki $S(1,1)$. Tako smo dobili $x = 1, y = 1$.

2.5.2 Cramerov sustav

Neka je zadan sustav od n jednadžbi i n nepoznanica:

$$\begin{array}{cccc}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n.
\end{array}$$

Sustav jednadžbi možemo zapisati u matričnom obliku $AX = b$, pri čemu je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Ako je determinanta matrice sustava različita od 0, tj. vrijedi

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

tada sustav ima jedinstveno rješenje i zovemo ga **Cramerov sustav**.

Cramerov sustav ima jedinstveno rješenje, n-torku $(x_1, x_2, ..., x_n)$, i dano je sa:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, ..., x_n = \frac{D_n}{D},$$

odnosno

$$x_i = \frac{D_i}{D}, i = 1, 2, ..., n.$$

gdje je D_i determinanta koju dobivamo iz determinante matrice sustava D tako da $i - ti$ stupac zamijenimo stupcem slobodnih koeficijenata (b).

Primjer 2.10. *Riješimo sljedeći sustav Cramerovom metodom*

$$\begin{array}{cccccc} 3x_1 & +7x_2 & -2x_3 & = & 10 \\ 2x_1 & -x_2 & & = & 3 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 5. \end{array}$$

Rješenje.

Zapišemo matricu sustava $AX = b$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Prvo moramo izračunati determinantu matrice sustava kako bismo provjerili je li sustav Cramerov.

$\det A = \det \begin{bmatrix} 3 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = -23 \Longrightarrow$ *sustav možemo rješavati Cramerovom metodom.*

$$x_1 = \frac{D1}{D}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 10 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -47 \Longrightarrow x_1 = \frac{-47}{-23} = \frac{47}{23}.$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 10 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -25 \Longrightarrow x_2 = \frac{-25}{-23} = \frac{25}{23}.$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D}$$

$$D_3 = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} = -43 \Longrightarrow x_3 = \frac{-43}{-23} = \frac{43}{23}.$$

Zadatak 2.56. *Riješite sustav jednadžbi*

$$\begin{array}{cccccc} x & -y & -z & = & 2 \\ 3x & +y & -3z & = & 2 \\ & y & -z & = & -1. \end{array}$$

Rješenje.

Računamo determinantu sustava $D = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = -4$. *Sustav je Cramerov.*

$$x_1 = \frac{D_1}{D}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 = \frac{-4}{-4} = 1.$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \qquad \Longrightarrow \qquad x_2 = \frac{4}{-4} = -1.$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D}$$

$$D_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x_3 = \frac{0}{-4} = 0.$$

Rješenje: $(x_1, x_2, x_3) = (1, -1, 0)$.

Zadatak 2.57. *Provjerite je li sljedeći sustav Cramerov.*

$$\begin{array}{cccccc} x & +2y & +3z & = & 4 \\ & y & +z & = & 0 \\ x & +3y & +4z & = & 1 \end{array}.$$

Rješenje.

Da bismo odredili je li sustav Cramerov računamo determinantu matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Dobivamo da je $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$. *Sustav nije Cramerov i ne možemo ga riješiti Cramerovom metodom.*

Zadatak 2.58. *Pokažite da je sljedeći sustav Cramerov i nađite mu rješenje:*

$$\begin{array}{cccccc} 2x_1 & -5x_2 & 4x_3 & 3x_4 & = & 4 \\ 3x_1 & -4x_2 & 7x_3 & 5x_4 & = & 11 \\ 4x_1 & -9x_2 & 8x_3 & 5x_4 & = & 8 \\ -3x_1 & 2x_2 & -5x_3 & 3x_4 & = & -3. \end{array}$$

Rješenje.

$$D = \det \begin{bmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{bmatrix} = 4. \textit{ Sustav je Cramerov.}$$

Dalje, Cramerovom metodom dobijemo da je : $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 1, 1)$.

Zadatak 2.59. *Pokažite da je sljedeći sustav Cramerov i nađite mu rješenje*

$$\begin{array}{rrrrcr} 2x_1 & -x_2 & +8x_3 & +3x_4 & = & 0 \\ x_1 & -4x_2 & +7x_3 & +2x_4 & = & -4 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & +2x_2 & -2x_3 & +3x_4 & = & 5. \end{array}$$

Rješenje.

$$D = \det A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 8 & 3 \\ 1 & -4 & 7 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} = 20$$

$x_1 = \frac{D_1}{D}$

$$D_1 = \det \begin{bmatrix} 0 & -1 & 8 & 3 \\ -4 & -4 & 7 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} = 40 \Longrightarrow x_1 = \tfrac{40}{20} = 2$$

$x_2 = \frac{D_2}{D}$

$$D_2 = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 & 3 \\ 1 & -4 & 7 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & 3 \end{bmatrix} = 20 \Longrightarrow x_2 = \tfrac{20}{20} = 1$$

$x_3 = \frac{D_3}{D}$

$$D_3 = \det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & -4 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} = 0 \Longrightarrow x_3 = \tfrac{0}{20} = 0$$

$x_4 = \frac{D_4}{D}$

$$D_4 = \det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 8 & 0 \\ 1 & -4 & 7 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 5 \end{bmatrix} = -20 \Longrightarrow x_4 = \tfrac{-20}{20} = -1$$

Rješenje sustava je $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 1, 0, -1)$.

Zadatak 2.60. *Pokažite da su sljedeći sustavi Cramerovi, te im nađite rješenje*

a) $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 14 \\ 18 \end{bmatrix}$ $\qquad (Rj.: x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 2)$

b) $\begin{array}{cccc} \frac{1}{2}x & & +z & = & \frac{3}{2} \\ x & +\frac{2}{3}y & & = & 1 \\ x & +y & +\frac{1}{3}z & = & \frac{4}{3} \end{array}$ $\qquad (Rj.: x = 1, y = 0, z = 1)$

c) $\begin{array}{cccc} 2x & -y & +z & = & 0 \\ x & +2y & +3z & = & -15 \\ 4x & +5y & +6z & = & -45 \end{array}$ $\qquad (Rj.: x = -4, y = -7, z = 1).$

2.5.3 Gauss-Jordanove eliminacije

Općenito, sustav linearnih jednadžbi je nerješiv (nema rješenje) ili rješiv. Ukoliko je sustav rješiv tada on ili ima jedinstveno rješenje (određen sustav) ili ima beskonačno mnogo rješenja (neodređen sustav). Cramerov sustav je rješiv budući da ima jedinstveno rješenje. Postavlja se pitanje: kako pronaći rješenja sustava koji nisu Cramerovi? Jedna od poznatijih metoda je Gauss-Jordanova metoda eliminacija. Gauss-Jordanova metoda je direktna metoda rješavanja sustava linearnih jednadžbi.

Neka nam je zadan sustav od n jednadžbi i n nepoznanica:

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{array}$$

Sustav jednadžbi možemo zapisati u matričnom obliku $AX = b$, pri čemu je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Prvi korak u traženju rješenja je zapisati proširenu matricu sustava koju dobivamo tako da matrici sustava A dodamo stupac b.

$$[A|b] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

Cilj je na mjestu matrice A jednostavnim operacijama po retcima dobiti jediničnu matricu. Jednostavne operacije po retcima su:

- množenje retka brojem
- zamjena redaka
- dodavanje jednog retka drugome
- jednom retku dodamo drugi redak pomnožen s nekim brojem.

Primjer 2.11. *Riješimo sustav jednadžbi Gauss-Jordanovom metodom eliminacija.*

$$\begin{aligned} x \quad -2y &= -3 \\ 4x \quad +y &= 6. \end{aligned}$$

.

Kada bismo ga zapisali matrično ($AX = b$) dobivamo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Zapišemo proširenu matricu sustava koju dobivamo tako da matrici sustava A dodamo stupac b.

Proširena matrica sustava

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & | & -3 \\ 4 & 1 & | & 6 \end{bmatrix}.$$

Cilj je na mjestu matrice A jednostavnim operacijama po retcima dobiti jediničnu matricu.

Promatramo proširenu matricu sustava $\begin{bmatrix} 1 & -2 & \vdots & -3 \\ 4 & 1 & \vdots & 6 \end{bmatrix}$. *Na mjestima* $(2,1)$ *i* $(1,2)$ *želimo dobiti* 0, *a na mjestima* $(1,1)$ *i* $(2,2)$ *broj* 1.

Krenimo s poništavanjem četvorke na mjestu $(2,1)$. *To možemo ostvariti tako da prvi redak pomnožimo sa* -4 *i dodamo drugom retku*

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & \vdots & -3 \\ 4 & 1 & \vdots & 6 \end{bmatrix} \; I \cdot (-4) + II \; \tilde{} \begin{bmatrix} 1 & -2 & \vdots & -3 \\ 0 & 9 & \vdots & 18 \end{bmatrix}.$$

Dalje, na mjestu $(2,2)$ *želimo dobiti* 1 *i na mjestu* $(1,2)$ *želimo dobiti* 0. *Primijetimo da ako drugi redak podijelimo sa* 9, *na mjestu* $(1,2)$ *ćemo dobiti* 1. *Zatim ćemo drugi redak pomnožiti s* 2 *i dodati ga prvom retku kako bismo na mjestu* $(1,2)$ *dobili nulu.*

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & \vdots & -3 \\ 0 & 9 & \vdots & 18 \end{bmatrix} \; I\dot{I} : 9 \; \tilde{} \begin{bmatrix} 1 & -2 & \vdots & -3 \\ 0 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix} \; II \cdot 2 + I \; \tilde{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix}$$

Kako sada pročitati rješenje? U prvom stupcu nalaze se koeficijenti uz varijablu x, *u drugom stupcu koeficijenti vezani uz varijablu* y, *a u zadnjem stupcu su slobodni članovi. Pa čitamo* $x = 1$, $y = 2$.

Zadatak 2.61. *Gauss-Jordanovim eliminacijama riješite sustav*

$$\begin{array}{rrcl} 3x & +y & = & 13 \\ -x & +y & = & 1. \end{array}$$

Rješenje. Zapišemo proširenu matricu sustava i rješavamo sustav metodom Gauss-Jordanovih eliminacija

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & \vdots & 13 \\ -1 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Zamijenimo retke te prvi pomnožimo sa (-1) *kako bismo na mjestu* $(1,1)$ *dobili* 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & \vdots & -1 \\ 3 & 1 & \vdots & 13 \end{bmatrix} \; I \cdot (-3) + II \; \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & \vdots & -1 \\ 0 & 4 & \vdots & 16 \end{bmatrix} \; II : 4 \; \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & \vdots & -1 \\ 0 & 1 & \vdots & 4 \end{bmatrix} \; I + II \; \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & \vdots & 4 \end{bmatrix}$$

Sada možemo pročitati rješenje $x = 3, y = 4$.

Zadatak 2.62. *Gauss-Jordanovim eliminacijama riješite sustav*

$$\begin{array}{rrrcr} x & -y & +z & = & 5 \\ & 2y & -4z & = & -14 \\ 3x & & -z & = & 4. \end{array}$$

Rješenje.

Sustav rješavamo Gauss-Jordanovom metodom. Prvo zapišemo proširenu matricu sustava i zatim matricu A svodimo na 3×3 jediničnu matricu.

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 1 & \vdots & 5 \\ 0 & 2 & -4 & \vdots & -14 \\ 3 & 0 & -1 & \vdots & 4 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ III - 3 \cdot I \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 1 & \vdots & 5 \\ 0 & 2 & -4 & \vdots & -14 \\ 0 & 3 & -4 & \vdots & -11 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ II : 2 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 1 & \vdots & 5 \\ 0 & 1 & -2 & \vdots & -7 \\ 0 & 3 & -4 & \vdots & -11 \end{array}\right] \begin{array}{c} I + II \\ \\ III - 3 \cdot II \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -1 & \vdots & -2 \\ 0 & 1 & -2 & \vdots & -7 \\ 0 & 0 & 2 & \vdots & 10 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ III : 2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -1 & \vdots & -2 \\ 0 & 1 & -2 & \vdots & -7 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 5 \end{array}\right] \begin{array}{c} I + III \\ II + 2 \cdot III \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 5 \end{array}\right]$$

Možemo pročitati rješenje: $x = 3, y = 3, z = 5$.

Zadatak 2.63. *Riješite sustav jednadžbi*

$$\begin{array}{rrrcr} x & -y & +4z & = & 6 \\ 2x & +3y & -z & = & 3 \\ & 5y & +4z & = & 4. \end{array}$$

Rješenje.

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 4 & \vdots & 6 \\ 2 & 3 & -1 & \vdots & 3 \\ 0 & 5 & 4 & \vdots & 4 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ I \cdot (-2) + II \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 4 & \vdots & 6 \\ 0 & 5 & -9 & \vdots & -9 \\ 0 & 5 & 4 & \vdots & 4 \end{array}\right] \begin{array}{c} I + II : 5 \\ \\ II \cdot (-1) + III \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \frac{11}{5} & \vdots & \frac{21}{5} \\ 0 & 5 & -9 & \vdots & -9 \\ 0 & 0 & 13 & \vdots & 13 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ III : 13 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \frac{11}{5} & \vdots & \frac{21}{5} \\ 0 & 5 & -9 & \vdots & -9 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} I + (-\frac{11}{5}) \cdot III \\ II + 9 \cdot III \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 5 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 2.64. *Gauss-Jordanovom metodom eliminacija riješite sustav*

$$\begin{array}{rrrcr} 3x & +5y & -4z & = & 12 \\ 2x & +3y & +z & = & 4 \\ x & -2y & +5z & = & -6. \end{array}$$

Rješenje.

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & \vdots & 12 \\ 2 & 3 & 1 & \vdots & 4 \\ 1 & -2 & 5 & \vdots & -6 \end{bmatrix} \textit{zamijenimo prvi i treći redak} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & \vdots & -6 \\ 2 & 3 & 1 & \vdots & 4 \\ 3 & 5 & -4 & \vdots & 12 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ II - 2 \cdot I \\ III - 3 \cdot I \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & \vdots & -6 \\ 0 & 7 & -9 & \vdots & 16 \\ 0 & 11 & -19 & \vdots & 30 \end{bmatrix} \begin{array}{c} I + \frac{2}{7} II \\ \\ III - \frac{11}{7} II \end{array} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{134}{7} & \vdots & -\frac{218}{7} \\ 0 & 7 & -9 & \vdots & 16 \\ 0 & 0 & -\frac{34}{7} & \vdots & \frac{34}{7} \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ III \div (-\frac{34}{7}) \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{17}{7} & \vdots & -\frac{10}{7} \\ 0 & 7 & -9 & \vdots & 16 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} I - \frac{17}{7} III \\ II + 9 III \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 7 & 0 & \vdots & 7 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 \end{bmatrix} \; II : 7 \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 \end{bmatrix}.$$

Čitamo rješenje: $x = 1, y = 1, z = -1.$

Zadatak 2.65. *Gauss-Jordanovom metodom riješite sustav*

$$\begin{array}{rrrcl} x & +y & +3z & = & 5 \\ 2x & +2y & +9z & = & 25 \\ x & -y & +9z & = & 3. \end{array}$$

Rješenje.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & \vdots & 5 \\ 2 & 2 & 9 & \vdots & 25 \\ 1 & -1 & 9 & \vdots & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ II - 2 \cdot I \\ III - I \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & \vdots & 5 \\ 0 & 0 & 3 & \vdots & 15 \\ 0 & -2 & 6 & \vdots & -2 \end{bmatrix}$$

Kako u drugom retku već imamo dvije nule koje želimo dobiti u trećem, drugi i treći redak zamijenimo.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & \vdots & 5 \\ 0 & -2 & 6 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 3 & \vdots & 15 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ II : (-2) \\ III : 3 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & \vdots & 5 \\ 0 & 1 & -3 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{c} I - II \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & -3 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{c} I - 6III \\ II + 3III \\ \\ \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & -26 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 16 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 5 \end{bmatrix}$$

Čitamo rješenje: $x = -26, y = 16, z = 5$.

Zadatak 2.66. *Riješite sustav linearnih jednadžbi*

$$\begin{array}{rrrcl} x & +y & +z & = & 0 \\ 6x & -3y & -z & = & 0 \\ 2x & +2y & +3z & = & 0. \end{array}$$

Rješenje.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 6 & -3 & -1 & \vdots & 0 \\ 2 & 2 & 3 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ II - 6I \\ III - 2I \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & -9 & -7 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} I - II \\ II + 7III \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & -9 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} I - II \\ II + 7III \\ \\ \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & -9 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \; II : (-9)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} I - II \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Čitamo rješenje: $x = 0, y = 0, z = 0.$

Zadatak 2.67. *Riješite sustave linearnih jednadžbi*

a) $\begin{matrix} 3x & +8y & -2z & = & 39 \\ 12x & -y & -5z & = & 27 \\ x & -\frac{1}{2}y & +3z & = & 4 \end{matrix}$ $\qquad (Rj.: x = 3, y = 4, z = 1)$

b) $\begin{matrix} 5x & +y & -z & = & 7 \\ x & -3y & -5z & = & -5 \\ 2x & -6y & -4z & = & 38 \end{matrix}$ $\qquad (Rj.: x = 5, y = -10, z = 8)$

c) $\begin{matrix} 5x & +y & = & 15 \\ x & -3y & = & 3 \end{matrix}$ $\qquad (Rj.: x = 3, y = 0).$

Sljedećim primjerom pokazat ćemo slučaj nepostojanja jedinstvenog rješenja pri rješavanju sustava jednadžbi Gauss-Jordanovom metodom eliminacije. Takve sustave nismo mogli rješavati Cramerovom metodom jer za njih vrijedi da im je determinanta sustava jednaka 0.

Primjer 2.12. *Rješavamo sustav jednadžbi*

$$\begin{matrix} x & +y & +2z & = & 5 \\ 2x & +2y & +4z & = & 10 \\ x & -y & +3z & = & 2. \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 5 \\ 2 & 2 & 4 & \vdots & 10 \\ 1 & -1 & 3 & \vdots & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ II - 2I \\ III - I \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & -2 & 1 & \vdots & -3 \end{bmatrix}$$

U drugom retku smo dobili jednadžbu $0x + 0y + 0z = 0.$ *Ta nam jednadžba ne nudi nikakve dodatne informacije jer je umnožak bilo kojeg broja s nulom jednak nuli. Stoga taj redak eliminiramo, ali sada više ne možemo dobiti jediničnu matricu. Sada jednostavnim operacijama po retcima u prvom retku želimo dobiti* 0 *na mjestu* $(1, 2)$ *i* 0 *na mjestu* $(3, 1)$*.*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 5 \\ 0 & -2 & 1 & \vdots & -3 \end{bmatrix} \quad II:(-2) \quad \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \vdots & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \quad I-II$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{2} & \vdots & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \vdots & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Za jednu varijablu uzimamo da je proizvoljna ili 'promjenjiva'. Odaberemo $z = t \in \mathbb{R}$.

Dalje iz jednadžbi dobivamo:

$$x + \frac{5}{2}z = \frac{7}{2} \Rightarrow x = \frac{7}{2} - \frac{5}{2}z$$

$$y - \frac{1}{2}z = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}z$$

Rješenje je

$$x = \frac{7}{2} - \frac{5}{2}t$$

$$y = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}t$$

$$z = t, \ t \in \mathbb{R}$$

Zadatak 2.68. *Riješite sustav jednadžbi*

$$\begin{array}{rrrcr} 7x & +2y & -3z & = & -1 \\ 6x & -y & & = & 4 \\ x & +3y & -3z & = & -5. \end{array}$$

Rješenje.

Zamijenimo prvi i zadnji stupac u proširenoj matrici sustava.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & \vdots & -5 \\ 6 & -1 & 0 & \vdots & 4 \\ 7 & 2 & -3 & \vdots & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ II-6I \\ III-7I \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & \vdots & -5 \\ 0 & -19 & 18 & \vdots & 34 \\ 0 & -19 & 18 & \vdots & 34 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ III-II \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & \vdots & -5 \\ 0 & -19 & 18 & \vdots & 34 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & \vdots & -5 \\ 0 & -19 & 18 & \vdots & 34 \end{bmatrix} \; II : (-19)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & \vdots & -5 \\ 0 & 1 & -\frac{18}{19} & \vdots & -\frac{34}{19} \end{bmatrix} \; I - 3II \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{19} & \vdots & \frac{7}{19} \\ 0 & 1 & -\frac{18}{19} & \vdots & -\frac{34}{19} \end{bmatrix}$$

Uzmemo $z = t \in \mathbb{R}$ i čitamo rješenja.

$$x = \frac{7}{19} + \frac{3}{19}t$$

$$y = -\frac{34}{19} + \frac{18}{19}t$$

$$z = t, \; t \in \mathbb{R}.$$

Zadatak 2.69. *Riješite sustav jednadžbi*

$$\begin{array}{cccccc} x & -y & +z & = & 1 \\ 2x & -2y & +2z & = & 4 \\ 5x & +4y & -2z & = & -3 \end{array}.$$

Rješenje.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 1 \\ 2 & -2 & 2 & \vdots & 4 \\ 5 & 4 & -2 & \vdots & -3 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ II - 2I \\ III - 5I \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 9 & -7 & \vdots & -8 \end{bmatrix}$$

Primjetimo da u drugom retku piše $0x + 0y + 0z = 2$, tj. $0 = 2$ pa ovaj sustav nema rješanja.

Gauss-Jordanovu metodu eliminacija moguće je primijeniti i u slučajevima kada sustav nije kvadratan - broj jednadžbi je različit od broja nepoznanica. No tada postoji mogućnost da se postupak neće moći provesti do kraja (u smislu dobivanja jedinične matrica na mjestu matrice sustava).

Primjer 2.13. *Riješimo sustav jednadžbi*

$$\begin{array}{cccc} 2x & +y & = & 11 \\ x & -y & = & 4 \\ x & +2y & = & 7 \end{array}.$$

Rješenje.

Zapišemo proširenu matricu sustava i rješavamo sustav metodom Gauss-Jordanovih eliminacija

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & \vdots & 11 \\ 1 & -1 & \vdots & 4 \\ 1 & 2 & \vdots & 7 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & \vdots & 4 \\ 2 & 1 & \vdots & 11 \\ 1 & 2 & \vdots & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} I\cdot(-2)+II \\ I\cdot(-1)+III \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & \vdots & 4 \\ 0 & 3 & \vdots & 3 \\ 0 & 3 & \vdots & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} II:3 \\ III:3 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} I+II \\ \\ III-I \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 5 \\ 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

Iz prve jednadžbe (prvog retka) dobivamo $x = 5$, *iz drugog retka* $y = 1$, *dok u trećem retku imamo* $0 = 0$, *što vrijedi za sve* x *i* y *te je stoga zadnji redak proširene matrice sustava suvišan i možemo ga izostaviti.*

Primjer 2.14. *Riješimo sustav linearnih jednadžbi*

$$\begin{array}{rrcl} 2x & +y & = & 11 \\ x & -y & = & 4 \\ x & +2y & = & 9 \end{array}$$

Zadatak 2.70. *Rješenje.*

Zapišemo proširenu matricu sustava i rješavamo sustav metodom Gauss-Jordanovih eliminacija

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & \vdots & 11 \\ 1 & -1 & \vdots & 4 \\ 1 & 2 & \vdots & 9 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & \vdots & 4 \\ 2 & 1 & \vdots & 11 \\ 1 & 2 & \vdots & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} I\cdot(-2)+II \\ I\cdot(-1)+III \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & \vdots & 4 \\ 0 & 3 & \vdots & 3 \\ 0 & 3 & \vdots & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} II:3 \\ III:3 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & \vdots & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{matrix} I+II \\ \\ III-I \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 5 \\ 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & \vdots & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

U trećem retku imamo $0 = \frac{2}{3}$, *što ne vrijedi ni za koje* x *i* y *te sustav nema rješenja.*

Zadatak 2.71. *Riješite sustav jednadžbi*

$$\begin{aligned} 2x + 2y - z &= 4 \\ x + 4z &= 1 \\ 3x - y + 2z &= 2 \\ 4x + 4y - 2z &= 8 \end{aligned}$$

Rješenje: $x = 1, y = 1, z = 0.$

Zadatak 2.72. *Riješite sustav jednadžbi*

$$\begin{aligned} 3x + y - 3z &= 0 \\ x - z &= 0 \\ 2x + 2y - 4z &= -2 \\ 2x + y - 3z &= -1 \end{aligned}$$

Rješenje:$x = 1, y = 0, z = 1.$

2.5.4 Primjene matričnog računa

Budući da matrice zamišljamo kao tablice, a tablicama se često prikazuju različiti ekonomski podaci, matrični račun jedan je od osnovnih elemenata matematike u ekonomiji. Slijede praktični primjeri problema pri rješavanju kojih se koristi matrični račun.

Zadatak 2.73. *Ako je vektor* $\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$ *vektor proizvodnje poduzeća (gdje je* q_i *količina i-tog proizvoda),* $c = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$, *vektor jediničnih troškova i* $p = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$ *vektor prodajnih cijena po jedinici proizvoda. Izračunajte i interpretirajte produkte:* *a)* $q^T c$ *b)* $q^T p$ *c)* $q^T(p - c)$.

(Rješenje: a) ukupni troškovi, b) ukupan prihod c) dobit .)

Zadatak 2.74. *U tablici je dan broj prodanih proizvoda* P_1, P_2, P_3 *u 4 hrvatska grada. Ukoliko su cijene proizvoda* P_1, P_2, P_3*:* $100, 120, 140$ *kuna redom, odredimo ukupan prihod za svaki grad.*

	P_1	P_2	P_3
Pula	*50*	*25*	*19*
Varaždin	*35*	*40*	*41*
Osijek	*30*	*21*	*32*
Dubrovnik	*25*	*30*	*32*

Uvodimo matrice: $A = \begin{bmatrix} 50 & 25 & 19 \\ 35 & 40 & 41 \\ 30 & 21 & 32 \\ 25 & 30 & 32 \end{bmatrix}$, $p = \begin{bmatrix} 100 \\ 120 \\ 140 \end{bmatrix}$.

Element a_{ij} *predstavlja broj prodanih proizvoda* P_j *u gradu i (1 = Pula, 2 = Varaždin, 3 = Osijek, 4 = Dubrovnik). Element* p_i *predstavlja cijenu proizvoda* P_i.

Računamo

$$A \cdot p = \begin{bmatrix} 50 & 25 & 19 \\ 35 & 40 & 41 \\ 30 & 21 & 32 \\ 25 & 30 & 32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 120 \\ 140 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\,660 \\ 14\,040 \\ 10\,000 \\ 10\,580 \end{bmatrix}$$

Dobivamo da ukupan prihod u gradu Puli iznosi 10660 kn, u Varaždinu 14040 kn, u Osijeku 10000 kn i u Dubrovniku 10580 kn.

Zadatak 2.75. *Investitor ulaže u tri financijska instrumenta: nekretnine, obveznice i dionice na tri tržišta. Očekivani prinosi dani su u matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1.25 & 0.95 & 1.10 \\ 0.89 & 0.98 & 1.15 \\ 1.06 & 1.25 & 0.82 \end{bmatrix},$$

gdje element a_{ij} *predstavlja vrijednost jedne kune nakon godinu dana uložene u instrument i (1=nekretnine, 2=obveznice, 3=dionice) na tržištu (* $j = 1, 2, 3$*). Matrica* $p = \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ 150 \end{bmatrix}$ *predstavlja portfelj investitora gdje element* p_i *označava vrijednost uloga u instrument i u kunama. Izračunajmo očekivane prinose na tri tržišta.*

Računamo :

$$p^T A = \begin{bmatrix} 100 & 200 & 150 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.25 & 0.95 & 1.10 \\ 0.89 & 0.98 & 1.15 \\ 1.06 & 1.25 & 0.82 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 462.0 & 478.5 & 463.0 \end{bmatrix}$$

Dobivamo: Na tržištu 1 *očekivani prinos iznosi* 462 *kn, Na tržištu* 2 *očekivani prinos iznosi* 478.5 *kn, tena tržištu* 3, 463 *kn.*

U praksi je često potrebno problem zadan riječima formulirati sustavom jednadžbi ili općenito, matematičkim izrazom. Pri formuliranju problema kao sustava jednadžbi i traženja rješenja problema je korisno je pratiti sljedeće upute:

1. Počnite rješavati problem pažljivim čitanjem i odredite nepoznanice koje treba odrediti. Varijablama prikažite veličine koje je potrebno odrediti.
2. Ponovno pročitajte problem i koristite varijable kako biste dane informacije formulirali matematičkim izrazima. Ponekad je korisno koristiti se grafičkim prikazima.
3. Koristite matematičke izraze kako biste zapisali problem pomoću jednadžbe ili sustava jednadžbi.
4. Riješite sustav jednadžbi ili jednadžbu.
5. Provjerite rješenje.

Zadatak 2.76. *Tvornica proizvodi tri vrste proizvoda: P_1,P_2 i P_3. Proizvodi se proizvode u 3 pogona I,II i III. U tablici su dani kapaciteti pogona (u satima), te vrijeme obrade pojedinog proizvoda po pogonu. Izračunajte koje količine proizvoda P_1,P_2 odnosno P_3 proizvesti kako bismo u potpunosti iskoristili kapacitete pogona.*

	P_1	P_2	P_3	kapacitet
I	2	1	1	600
II	3	2	1	900
III	0	1	2	300

Uvdimo oznake:

x_1 = količina proizvedenih proizvoda P_1
x_2 = količina proizvedenih proizvoda P_2
x_3 = količina proizvedenih proizvoda P_3

Problem proizvodnje možemo prikazati kao sustav linearnih jednadžbi:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 600 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 900 \\ x_2 + 2x_3 &= 300 \end{aligned}$$

Element a_{ij} matrice sustava $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ prikazuje vrijeme obrade u i-tom pogonu jedne jedinice proizvoda P_j.

Matrica $b = \begin{bmatrix} 600 \\ 900 \\ 300 \end{bmatrix}$ daje kapacitete pogona (b_i nam daje kapacitet i-tog pogona).

Sustav možemo prikazati matrično $Ax = b$, gdje je $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$. Rješenje sustava je tada $x = A^{-1}b$. Također, do rješenja možemo doći metodom Gauss Jordanovih eliminacija ili Cramerovom metodom. Dobivamo rješenje: $x_1 = 200, x_2 = 100, x_3 = 100$.

Zadatak 2.77. *Poduzeće proizvodi tri proizvoda P_1, P_2, P_3 i P_4 od 4 vrste materijala M_1,M_2, M_3 i M_4. Utrošak materijala po jedinici pojedinog proizvoda i raspoložive količine materijala dane su u tablici. Odredite koje količine proizvoda proizvesti kako bi se u potpunosti iskoristile raspoložive količine materijala.*

	P_1	P_2	P_3	P_4	količine
M_1	1	1	1	0	50
M_2	2	2	0	1	60
M_3	2	1	2	2	100
M_4	0	1	1	4	80

(Rješenje: $x_1 = 150, x_2 = 50, x_3 = 50, x_4 = 50$.)

Zadatak 2.78. *Osoba ima na raspolaganju* 50000 *kn koje ulaže u imovinu A s prinosom* 10% *godišnje, imovinu B s prinosom* 6% *godišnje i imovinu C s prinosom* 7% *godišnje. Strategija osobe je u imovinu A uložiti dvostruko više nego imovinu B. Odredite koliko osoba mora uložiti u pojedinu imovinu ako želi ostvariti prinos od točno* 3900 *kn.*

(Rješenje: $x_1 = 16000, x_2 = 8000, x_3 = 26000.$*)*

Zadatak 2.79. *Poduzeće proizvodi tri vrste proizvoda* P_1*,* P_2 *i* P_3 *na tri stroja* S_1*,*S_2 *i* S_3*. Svaki od proizvoda obrađuje se na svakom od strojeva. U tablici je dano vrijeme obrade pojedinog proizvoda na svakom od strojeva i kapaciteti strojevima (u satima). Izračunajte koje količine proizvoda* P_1*,*P_2 *odnosno* P_3 *proizvesti kako bi proizvodni kapaciteti bili u potpunosti iskorišteni.*

Stroj\ Proizvod	P_1	P_2	P_3	*kapacitet*
S_1	*3*	*2*	*3*	*540*
S_2	*1*	*4*	*1*	*520*
S_3	*2*	*2*	*1*	*400*

Rješenje.

$$\begin{aligned} 3x + 2y + 3z &= 540 \\ x + 4y + z &= 520 \\ 2x + 2y + z &= 400 \end{aligned}$$

Rješevanjem sustava linearnih dobivamo rješenje $x = 84, y = 102, z = 28.$

Zadatak 2.80. *Poduzeće Klok proizvodi dvije vrste proizvoda: visokokvalitetne (VK,* $j = 1$*) i niskokvalitetne (NK,* $j = 2$*) satove koje prodaje na dva prodajna mjesta* P_1 *i* P_2*. Vrijednosti prodaje za siječanj i veljaču dane su u matricama A (prodaja za siječanj) i B (prodaja za veljaču) pri čemu se na mjestu* (i, j) *nalazi količina* $j-$*tog proizvoda prodana na prodajnom mjestu* P_i*.*

$$A = \begin{array}{c} P1 \\ P2 \end{array} \begin{bmatrix} 18000 & 35000 \\ 25000 & 27000 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{array}{c} P1 \\ P2 \end{array} \begin{bmatrix} 20000 & 40000 \\ 30000 & 25000 \end{bmatrix}$$

a) Kolika je ukupna prodaja poduzeća KABEL u ta dva mjeseca po pojedinom mjestu prodaje i po pojedinom tipu proizvoda?

(Rješenje: $A + B$*)*

b) Koliko je povećanje prodaje u veljači u odnosu na siječanj po pojedinom mjestu i po pojedinoj vrsti proizvoda?

(Rješenje: $B - A$*, element na mjestu* $(2, 2)$ *je negativan što znači da je došlo do smanjenja prodaje)*

c) Ukoliko je provizija na prodaju 5%, *izračunajte proviziju za svako prodajno mjesto po pojedinom tipu proizvoda za siječanj.*

(Rješenje: $0.05A$*.)*

Zadatak 2.81. *Poduzeće Varadub treba odabrati dobavljača sirovina koje koristi u dva pogona koji su smješteni u Varaždinu i Dubrovniku. U svakom pogonu koristi se tri vrste sirovina: čelik, drvo i plastiku s tjednim potrebama (u standardnim jedinicama). Razmatraju se ponude dvaju dobavljača: Kontinental d.o.o. i Adriasupply koji dobavljaju iste sirovine, ali s drugačijim cijenama po jedinici sirovine. Tjedne potrebe pogona i cijene dobavljača dane su u tablicama:*

Potražnja	*Čelik*	*Drvo*	*Plastika*
Varaždin	*20*	*30*	*8*
Dubrovnik	*22*	*25*	*15*

Cijene	*Čelik*	*Drvo*	*Plastika*
Kontnental d.o.o.	*300*	*100*	*145*
Adriasupply	*290*	*90*	*180*

1) Upotrijebite matrični račun kako biste odredili kojeg dobavljača odabrati za pogon u Varaždinu, kojeg za pogon u Dubrovniku te kojeg za oba pogona?

2) Ukoliko dobavljači povise cijene za 10% odredite novu matricu cijena.

Rješenje. 1) Za pogon u Varaždinu bolje je odabrati dobavljača Adriasupply. Za pogon u Dubrovniku bolje je odabrati dobavljača Kontinental d.o.o. Ukoliko je potrebno odabrati samo jednog dobaljača. Optimalno je odabrati dobavljača Adriasupply.

2) Nova matrica cijena $C = 1.1 \cdot \begin{bmatrix} 300 & 100 & 145 \\ 290 & 90 & 180 \end{bmatrix}$.

Zadatak 2.82. *Poduzeće JaKa oglašava svoj novi proizvod u tri medija: TV* $(i = 1)$*, radio* $(i = 2)$ *i dnevni tisak* $(i = 3)$*. Trošak po oglasu (u tisućama kuna) dan je u matrici* C*. Poduzeće je podijelilo ciljanu populaciju u tri skupine: žene u dobi od 18- 30 godina* $(j = 1)$*, žene u dobi od 30 do 50 godina* $(j = 2)$ *i žene starije od 50 godina* $(j = 3)$*. U matrici* T *dan je broj oglasa u svakome od medija koji je usmjeren na pojedinu skupinu pri čemu je* T_{ij} *označava trošak po* i*-toj vrsti oglasa u* j*-toj populaciji.*

$$C = \begin{bmatrix} 20 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} 50 & 30 & 5 \\ 40 & 60 & 30 \\ 45 & 60 & 40 \end{bmatrix}$$

a) Odredite matricu koja opisuje ukupne troškove oglašavanja za svaku ciljanu populaciju *b) Koliko iznosi trošak oglašavanja putem oglasa u tisku u svim skupinama (žene od 18 i više godina) zajedno?*

(Rješenje. a) $CT^T = \begin{bmatrix} 1285 \\ 1430 \\ 1560 \end{bmatrix}$ *b)* $9 * (40 + 60 + 30) = 1170$*).*

Zadatak 2.83. *Poduzeće XX proizvodi tri vrste proizvoda. Dan je vektor dnevne proizvodnje nekog poduzeća* $q = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix}$ *(*q_{i1} *=količina i-tog proizvoda) koja se ostvaruje na jednom stroju čiji je dnevni kapacitet* 15 *sati. Ako je u matrici* $c = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.1 \\ 0.05 \end{bmatrix}$ *dano* c_{i1} *vrijeme (u satima) potrebno za proizvodnju jedne jedinice proizvoda* i*, odredite:*

1) Razinu iskorištenosti dnevnog kapaciteta stroja. Jesu li kapaciteti stroja u potpunosti iskorišteni?

2) Odredite razinu proizvodnje q *tako da kapaciteti stroja budu u potpunosti iskorišteni, uz uvjet da razina proizvodnje prva dva proizvoda bude* $q_{11} = 10$ *i* $q_{21} = 20$*.*

Zadatak 2.84. *Poduzeće proizvodi četiri vrste proizvoda od 5 vrsta materijala. Utrošak materijala (kg) po jednoj jedinici proizvoda dan je u tablici*

Materijal\Proizvod	P_1	P_2	P_3	P_4	*Raspoložive količine materijala*
M_1	*0*	*0*	*1*	*2*	*30*
M_2	*1*	*0*	*0*	*4*	*42*
M_3	*0*	*1*	*1*	*0*	*14*
M_4	*1*	*1*	*2*	*6*	*86*
M_5	*0*	*3*	*1*	*0*	*22*

Odredite koje količine proizvoda P_1*,* P_2*,* P_3 *i* P_4 *proizvesti kako bi svi materijali bili u potpunosti iskorišteni.*

(Rješenje: $(2, 4, 10, 10)$*.)*

Zadatak 2.85. *Dana je matrica proizvodnje poduzeća* q *i prodajnih cijena* p*,*

$$q = \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ 120 \\ 60 \end{bmatrix} \quad i\ p = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ 15 \\ 20 \end{bmatrix}$$

.

a) Izračunajte i interpretirajte vrijednost $p^T q$.

b) Za danu matricu $e = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ izračunajte i interpretirajte vrijednost eq.

(Rješenje: a) $p^T q = 6200$ ukupan prihod poduzeća, b) $eq = 480$ ukupna razina proizvodnje.)

Zadatak 2.86. *Poduzeće prodaje tri vrste proizvoda u dva grada. U matrici $A = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 0 & 10 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$ dan je broj prodanih proizvoda u dva hrvatska grada (c_{i1} broj prodanih proizvoda i u Makarskoj; c_{i2} broj prodanih proizvoda i u Omišu). Cijene proizvoda dane su u matrici $c = \begin{bmatrix} 1020 \\ 1405 \\ 1500 \end{bmatrix}$, pri čemu je c_{i1} cijena i-tog proizvoda u kunama. Izračunajte $c^T A$ i interpretirajte elemente na mjestu $(1,1)$.*

(Rješenje. $c^T A = \begin{bmatrix} 17\,160 & 23\,590 \end{bmatrix}$. Interpretacija: Prihod u Makarskoj iznosi 17160 kn.)

Zadatak 2.87. *Organizator koncerata prodaje dvije vrste karata za koncerte VIP i REGULAR. Cijena jedne VIP karte je 210 kn, dok je cijena REGULAR karte 140 kn. Ukupno je dostupno 16000 karata za koncerte u njegovoj organizaciji, koliko karata treba prodati kako bi ostvario prihod od 2660000 kn?*

(Rješenje: 1000 REGULAR karata, 600 VIP karata.)

2.6 Zadaci za vježbu - gradivo matrica

Ispit 2.1. *Riješite zadatke*

1. Ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, izračunajte $A \cdot B + C^T$.

2. Izračunajte determinantu matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

3. Zadane su matrice A i B. Riješite matričnu jednadžbu $AX - 3B = 2X$.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

4. Poduzeće proizvodi tri proizvoda P_1, P_2 i P_3 od 3 vrste materijala M_1,M_2 i M_3 .Utrošak materijala po jedinici pojedinog proizvoda i raspoložive količine materijala dane su u tablici. Odredite koje količine proizvoda proizvesti kako bi se u potpunosti iskoristile raspoložive količine materijala.

	P_1	P_2	P_3	količine
M_1	1	3	1	50
M_2	0	1	2	10
M_3	1	0	4	20

5. Poduzeće XXX proizvodi tri proizvoda. Ako je u matrici q dana tjedna razina proizvodnje poduzeća (gdje je q_{i1} količina i-tog proizvoda), u matrici c dani su jedinični troškovi proizvodnje, a u matrici p prodajne cijene po jedinici proizvoda. Ako je $q = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \\ 9 \end{bmatrix}$, $c = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$, $p = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}$, izračunajte i interpretirajte umnoške:

a) $q^T c$ b) $q^T p$ c) $q^T(c - p)$

d) Ukoliko su se prodajne cijene povećale za 50% odredite prihod poduzeća.

Rješenje:

1. $A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 1 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$$

2. $\det A = 4 * (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 4$

3. Izrazimo nepoznanicu X :

$AX - 3B = 2X \Rightarrow AX - 2X = 3B \Rightarrow (A - 2I)X = 3B$

$\Rightarrow X = (A - 2I)^{-1}3B$

$A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$X = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 6 \end{bmatrix}$

4. Označimo x_1 = količina proizvedenih proizvoda P_1

x_2 = količina proizvedenih proizvoda P_2
x_3 = količina proizvedenih proizvoda P_3

Problem proizvodnje možemo prikazati kao sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 50 \\ x_2 + 2x_3 &= 10 \\ x_1 + 4x_3 &= 20 \end{aligned}$$

Do rješenja dolazimo Cramerovom ili Gauss-Joranovom metodom eliminacija.

Rješenje je $x_1 = 20, x_2 = 10, x_3 = 0$.

5. $q^T c = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} = 103 \Rightarrow$ ukupni troškovi proizvodnje

b) $q^T p = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix} = 260 \Rightarrow$ ukupan prihod

c) $q^T(c - p) = q^T c - q^T p = 260 - 103 = 157 \Rightarrow$ dobit

d) Nove cijene $p^{'} = p + 0.5p = 1.5p = 1.5 \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.0 \\ 9.0 \\ 15.0 \end{bmatrix}$

Prihod poduzeća je tada $\begin{bmatrix} 10 & 15 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12.0 \\ 9.0 \\ 15.0 \end{bmatrix} = 390.$

Ispit 2.2. *Riješite zadatke*

1. Izračunajte determinantu matrice $A \cdot B + C$, ako su zadane su matrice $A = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & -4 & -4 \\ -1 & -3 & -5 \end{bmatrix}$.

2. Zadane su matrice A i B. Riješite matričnu jednadžbu $XA - 2B = 3X$.
$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}$.

3. Poduzeće X treba odabrati dobavljača sirovina koje koristi u dva pogona koji su smješteni u dva hrvatska grada: Osijek i Pula. U svakom pogonu koristi se tri vrste sirovina: željezo, guma i drvo. U tablici 1 je dana tjedna potreba za sirovinama pojedinog pogona. Razmatraju se ponude dvaju dobavljača: Doba d.d. i Vljač d.o.o. U tablici 2 dani su podaci o cijenama jedne standardne jedinice sirovine svakog o dobavljača.

1. Tjedne potrebe	Željezo	Guma	Drvo
Osijek	10	20	40
Pula	15	30	30

2. Cijene	Željezo	Guma	Drvo
Doba	12	4	2
Vljač	10	5	3

Za svaki pogon posebno odredite kojeg je dobaljača odabrati za nabavu sirovina.

4. Riješite sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 - x_3 &= 5 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &= -4 \\ x_2 - 2x_3 &= -6 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 7. \end{aligned}$$

Ispit 2.3. *Riješite zadatke*

1. Izračunajte determinantu matrice $A \cdot B + C$, ako su zadane su matrice
$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1, \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & -4 & -4 \\ -1 & 2 & -5 \end{bmatrix}.$$

2. Zadane su matrice A i B. Riješite matričnu jednadžbu $XA - 2B = 3X$.
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Poduzeće X treba odabrati dobavljača sirovina koje koristi u dva pogona koji su smješteni u dva hrvatska grada: Osijek i Pula. U svakom pogonu koristi se tri vrste sirovina: željezo, guma i drvo. U tablici 1 je dana tjedna potreba za sirovinama pojedinog pogona. Razmatraju se ponude dvaju dobavljača: Doba d.d. i Vljač d.o.o. U tablici 2 dani su podaci o cijenama jedne standardne jedinice sirovine svakog o dobavljača.

1. Tjedne potrebe	Željezo	Guma	Drvo
Osijek	20	20	30
Pula	20	30	10

2. Cijene	Željezo	Guma	Drvo
Doba	6	4	3
Vljač	5	6	2

Za svaki pogon posebno odredite kojeg je dobaljača odabrati za nabavu sirovina.

4. Poduzeće proizvodi tri proizvoda P_1, P_2 i P_3 koje obrađuje na tri stroja S_1,S_2 i S_3 . Vrijeme potrebno za proizvodnju jedne jedinice pojedinog proizvoda na pojedinom stroju i raspoloživost strojeva (u satima u radnom tjednu) dane su u tablici. Odredite koje količine proizvoda proizvesti (u jednom tjednu) kako bi strojevi bili u potpunosti iskorišteni.

	P_1	P_2	P_3	Raspoloživost
S_1	3	2	1	80
S_2	0	1	1	30
S_3	1	0	5	60

Ispit 2.4. *Riješite zadatke*

1. Izračunajte determinantu matrice $A \cdot B - C$, ako su zadane su matrice
$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 5 & -12 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$

2. Zadane su matrice A i B. Riješite matričnu jednadžbu $AX + B = X$.
$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Poduzeće prodaje tri vrste proizvoda u dva grada. U matrici A dan je broj prodanih proizvoda u dva grada (u prvom stupcu nalazi se broj prodanih proizvoda u Puli, a u drugom stupcu nalaizi se broj prodanih proizvoda u Rijeci). Cijene proizvoda dane su u matrici c.

   Izračunajte $c^T A$ i interpretirajte element na mjestu (1,2)
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 6 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

   Za svaki pogon odredite kojeg dobaljača odabrati za nabavu sirovina.

4. Poduzeće proizvodi tri proizvoda P_1, P_2 i P_3 od 3 vrste materijala M_1,M_2 i M_3 . Utrošak materijala po jedinici pojedinog proizvoda i raspoložive količine materijala dane su u tablici. Odredite koje količine proizvoda proizvesti kako bi se u potpunosti iskoristile raspoložive količine materijala.

	P_1	P_2	P_3	količine
M_1	2	1	1	35
M_2	0	1	2	40
M_3	1	0	1	20

Ispit 2.5. *Riješite zadatke*

1. Ako je $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, izračunajte $A \cdot B + C^T$.

2. Izračunajte determinantu matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

3. Zadane su matrice A i B. Riješite matričnu jednadžbu $XA - B = 2X$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 6 \end{bmatrix}.$$

4. Poduzeće proizvodi tri proizvoda P_1, P_2 i P_3 od 3 vrste materijala M_1,M_2 i M_3 . Utrošak materijala po jedinici pojedinog proizvoda i raspoložive količine materijala dane su u tablici. Odredite koje količine proizvoda proizvesti kako bi se u potpunosti iskoristile raspoložive količine materijala.

	P_1	P_2	P_3	količine
M_1	2	1	0	30
M_2	0	1	3	55
M_3	1	1	1	45

5. Poduzeće XXX proizvodi tri proizvoda. Ako je u matrici q dana tjedna proizvodnja poduzeća (gdje je q_{i1} količina i-tog proizvoda), u matrici c dani su jedinični troškovi proizvodnje i u matrici p prodajne cijena po jedinici proizvoda. Ako je $q = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}$, $c = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$,$p = \begin{bmatrix} 11 \\ 12 \\ 15 \end{bmatrix}$, $e = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ izračunajte i interpretirajte umnoške:

a) $q^T e$ b) $q^T p$ c) $q^T(p - c)$

d) Ukoliko su se prodajne cijene povećale za 50% odredite dobit poduzeća.

Poglavlje 3

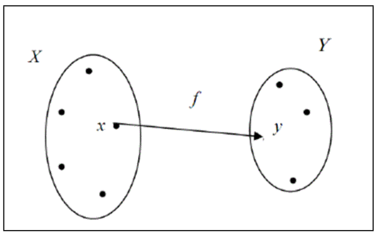
Funkcije

3.1 Pojam i osnovna svojstva funkcije

Neka su X i Y neprazni skupovi i f pravilo koje svakom elementu $x \in X$ pridružuje točno jedan element $y \in Y$. Uređenu trojku (X, Y, f) nazivamo funkcijom i označujemo $f.X \to Y$. Skup X nazivamo domenom funkcije f, a skup Y kodomenom. Za svaki $x \in X$ njemu pridruženi $y \in Y$ pravilom f ćemo označavati $f(x)$ i kazati da je y slika argumenta (varijable) x. Simbol x koji označava proizvoljan element iz skupa X nazivamo i nezavisna varijabla (ili original), a $y = f(x)$ zavisna varijabla (njegova slika).

Skup $\mathrm{Im}(f) = \{f(x) : x \in X\} \subseteq Y$ zovemo slika funkcije f.

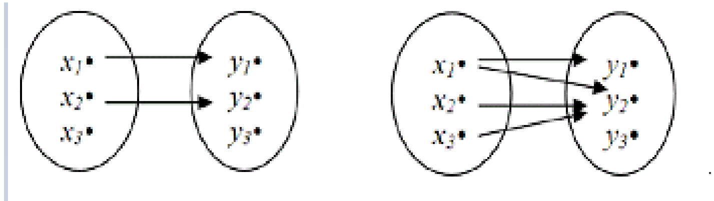
Funkcija $f : X \to Y$ često se sugestivno prikazuje na sljedeći način: skupovi X i Y prikažu se Vennovim dijagramima čiji su elementi (točke) međusobno povezani strelicama na način da je od svakog elementa domene (skupa X) usmjerena strelica prema elementu kodomene (skupa Y) koji je pridružen tom elementu.



Funkcija

Funkcija $f : X \to Y$ za koju je $f(x) = y_0$ za svaki $x \in X$ nazivamo **konstantom**.

Funkcija $f : X \to X$za koju je $f(x) = x$ za svaki $x \in X$ nazivamo **identitetom** i označavamo $f = 1_X$.



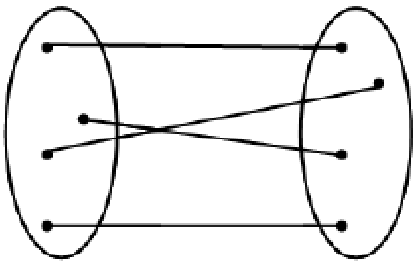
Slika 3.1: Primjeri preslikavanja koja nisu funkcije

3.1.1 Surjekcija, injekcija i bijekcija

Ako je zadana funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (realna funkcija realne varijable) zadana analitičkim izrazom. Podrazumijeva se da je njena **domena** ili **područje definicije funkcije** onaj podskup skupa $\mathbb{R}$ za koji analitički izraz ima smisla, tj. to je skup svih $x \in \mathbb{R}$ za koje $f(x)$ realan broj.

Ako je slika funkcije f cijeli skup Y (to jest vrijedi $y = \mathrm{Im}(f)$) kaže se da je f **surjekcija**. Dakle, f je surjekcija ako i samo ako za svaki $y \in Y$ postoji $x \in X$ takav da je $y = f(x)$.

Ako je svaki $y \in Y$ slika najviše jednog $x \in X$, odnosno različiti elementi skupa X preslikavaju se u različite elemente skupa Y, kažemo da je funkcija f **injekcija**. Ako je funkcija f i injekcija i surjekcija, kažemo da je ona **bijekcija**.



Primjer bijekcije

Primjer 3.1. *Neka su dane funkcije:*

$f : \{0, 1\} \to \{F, T\}$ *takva da je* $f(0) = F$ *i* $f(1) = T$.

$g : \{0, 1\} \to \{F, T\}$ *takva da je* $g(0) = F$ *i* $g(1) = F$.

$h : \{0, 1\} \to \{F, T, Z\}$ *takva da je* $h(0) = F$ *i* $h(1) = T$.

Primijetimo: funkcija f *je bijekcija, funkcija* g *nije ni surjekcija ni injekcija, a funkcija* h *je injekcija.*

Zadatak 3.1. *Dani su skupovi* $X = \{c, z, s\}$ *i* $Y = \{\check{c}, \check{z}.\check{s}\}$ *i funkcija* $f : X \to Y$ *takva da je* $f(c) = \check{c}$, $f(s) = \check{s}$ *i* $f(z) = \check{s}$.

Odredite je li ova funkcija: bijekcija/surjekcija/injekcija. Definirajte funkciju $g : X \to Y$ koja je bijekcija.

Rješenje. Funkcija f nije ni injekcija ni surjekcija. Primjer bijekcije $g(c) = \check{c}$, $g(s) = \check{s}$ i $g(z) = \check{z}$.

Za funkcije oblika $f : X \to Y, X \subseteq \mathbb{R}, Y \subseteq \mathbb{R}$ kažemo da su realne funkcije (jer je skup funkcijskih vrijednosti podskup skupa realnih brojeva) realne varijable (jer je domena funkcije podskup skupa realnih brojeva). Realne funkcije se najčešće zadaju analitičkim izrazom $y = f(x)$, to jest pravilom kojim svakom elementu domene prodružujemo neku realnu vrijednost kodomene.

Primjer 3.2. *Primjeri zadavanja funkcija*

- *Odnos cijena (p) i potražnje (q) neke robe dan je tablicom*

p	4	8	12
q	200	120	20

- *Odnos cijene i ponude dan je izrazom $q(p) = 2p^2 + 10$*
- *Dana je funkcija troškova u ovisnosti o proizvodnji $C(q) = 5q + 100$*

Zadatak 3.2. *Poduzeće prodaje proizvod po cijeni 127 kn po komadu. Odredite funkciju $f(x)$ koja će opisivati prihode poduzeća za dani broj prodanih proizvoda x.*

(Rješenje $f(x) = 127x$.)

Zadatak 3.3. *Pretpostavimo da poduzeće ostvaruje prihode $R(x) = 225x$ za x prodanih proizvoda. Nadalje, ukupni troškovi poduzeća za proizvodnju x proizvoda dani su sa $C(x) = 22x + 11000$.*

a) *Odredite funkciju dobiti poduzeća $D(x)$(dobit =prihod - trošak)*

b) *Odredite razinu prihoda poduzeća za 1000 prodanih prizvoda.*

Rješenje a) $D(x) = R(x) - C(x) = 203x - 11000$ b) $D(1000) = 192000$.

3.1.2 Jednakost funkcija i nul-točke funkcije

Kažemo da je funkcija f jednaka funkciji g i pišemo $f = g$ ako i samo ako vrijedi:

1. f i g imaju iste domene
2. f i g imaju iste kodomene
3. za svaki $x \in X$ je $f(x) = g(x)$.

Često se nailazi na slučaj kada su dvije funkcije jednake na dijelu svojih domena. Tada govorimo o restrikciji funkcije.

Nadalje, kada tražimo točke $x \in X$ (elemente domene funkcije) za koje vrijedi $f(x) = g(x)$, govorimo o rješavanju jednadžbe.

Kada rješavamo jednadžbu $f(x) = 0$ kažemo da tražimo nul-točke funkcije. Dakle, nul-točka funkcije je točke $x \in X$ za koju je $f(x) = 0$.

Primjer 3.3. *Dana je funkcija* $f(x) = 3x - 1$. *Odredimo* $f(2)$ *i* $f(-2)$.
Umjesto x *uvrštavamo* 2, *odnosno* -2.

$$f(2) = 3 \cdot 2 - 1 = 5$$
$$f(-2) = 3 \cdot (-2) - 1 = -7$$

Zadatak 3.4. *Ako je* $f(x) = x^2+5x-6$ *odredite* $f(0), f(1), f(-1), f(5), f(\frac{1}{3})$.
Rješenje.

$f(0) = 0^2 + 5 \cdot 0 - 6 = -6.$
$f(1) = 1^2 + 5 \cdot 1 - 6 = 0$
$f(-1) = (-1)^2 + 5(-1) - 6 = -10.$
$f(2) = 2^2 + 5 \cdot 2 - 6 = 8.$
$f(\frac{1}{3}) = (\frac{1}{3})^2 + 5 \cdot \frac{1}{3} - 6 = -\frac{38}{9}.$
Primjetimo kako je $f(1) = 0$. *Kažemo da je* 1 *nul -točka funkcije* f.

Zadatak 3.5. *Neka je* $f(x) = x^2 - 4$. *Odredite:*

a) $f(\sqrt{2}),\ f(-5), f(2\sqrt{3}), f(\frac{1}{2})$.

b) *Nađite nul-točku funkcije* f.

c) *Odredite* $f(1) + f(-1)$.

Rješenje.

a) $f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 - 4 = 2 - 4 = -2$

$f(5) = (-5)^2 - 4 = 21$

$f(2\sqrt{3}) = (2\sqrt{3})^2 - 4 = 12 - 4 = 8$

$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - 4 = \frac{-3}{4}$.

b) x je nul-točka funkcije f ako je $f(x) = 0$. Računamo:

$$\begin{aligned} x^2 - 4 &= 0 \\ x^2 &= 4 \\ x &= \pm 2. \end{aligned}$$

Funkcija f ima dvije nul-točke: $x_1 = -2$ i $x_2 = 2$.

c) Izračunajmo prvo $f(1)$ i $f(-1)$.

$f(1) = 1 - 4 = -3$

$f(-1) = 1 - 4 = -3$

$f(1) + f(-1) = -3 + (-3) = -6$.

Zadatak 3.6. *Neka je $f(x) = x^2 + 2x$. Odredite:*

a) $f(a)$, $f(b)$, $f(a) + f(b)$, $f(a + b)$.

b) *Nađite nul-točku funkcije.*

c) *Nađite točku u kojoj je funkcija jednaka* 1.

Rješenje.

a) $f(a) = a^2 + 2a$.

$f(b) = b^2 + 2b$.

$f(a) + f(b) = a^2 + 2a + b^2 + 2b$.

$f(a + b) = (a + b)^2 + 2(a + b) = a^2 + 2ab + b^2 + 2a + 2b$.

Trebamo primijetiti da $f(a) + f(b)$ ne mora biti jednako $f(a + b)$!

b) Rješavamo jednadžbu $f(x) = 0$, tj. $x^2 + 2x = 0$.

$x(x + 2) = 0$ i dobivamo $x = 0$ i $x = -2$.

Funkcija f ima dvije nul-točke $x_1 = 0$ i $x_2 = -2$.

c) Rješavamo jednadžbu $f(x) = 1$.

$$x^2 + 2x = 1.$$
$$x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{4+4}}{2}$$
$$\Rightarrow x_1 = \frac{-2-\sqrt{2}}{2} \text{ i } x_2 = \frac{-2+\sqrt{2}}{2}.$$

Zadatak 3.7. *Zadane su funkcije $f(x) = x^3 + 1$ i $g(x) = x + 1$.Odredite točku za koju funkcije poprimaju iste vrijednosti.*

Rješenje.
Rješavamo jednadžbu $x^3 + 1 = x + 1$.

$$x^3 = x$$
$$x^3 - x = 0$$
$$x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x(x-1)(x+1) = 0$$
$$\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1.$$

Funkcije poprimaju iste vrijednosti u tri točke: $-1, 0, 1$.

Zadatak 3.8. *Neka je $f(x) = ax^2 + bx + c$ i neka je $f(1) = -4$, $f(0) = -2$ i $f(2) = 8$. Odredite koeficijente a, b, c.*

Rješenje.
$f(1) = -4 \quad \Rightarrow a + b + c = -4$
$f(0) = -2 \quad \Rightarrow c = -2$
$f(2) = 8 \quad \Rightarrow 4a + 2b + c = 8.$
Uvrstimo $c = -2$ u prvu i treću jednadžbu.
$a + b = -2 \quad \Rightarrow a = -b - 2$
$4a + 2b = 10.$
Sada uvrstimo $a = -b - 2$ u drugu jednadžbu.
$4(-b - 2) + 2b = 10 \Rightarrow b = -9 \Rightarrow a = 9 - 2 = 7.$
Dobivamo $f(x) = 7x^2 - 9x - 2$.

Zadatak 3.9. *Nađite nul-točke funkcije $f(x) = 9x - 7$.*

Rješenje-
Rješavamo jednadžbu $f(x) = 0 \Longrightarrow 9x - 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{9}$.

Zadatak 3.10. *Nađite nul-točke funkcije* $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$.

Rješenje

Ponovimo, $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Stogo se rješavanje jednadžbe $\ln(x^2 + 2x + 2) = 0$ *svodi na rješavanje jednadžbe* $x^2 + 2x + 2 = 1$.

$x^2 + 2x + 1 = 0 \Longrightarrow x_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{4-4}}{2} = -1$.

Nul- točka funkcije $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$ *je točka* -1.

Zadatak 3.11. *Odredite nul točke funkcije* $f(x) = x^4 - 9x^2$.

Rješenje.

$x^4 - 9x^2 = x^2(x^2 - 9)$.

Rješavamo :

$x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$

$x^2 - 9 = 0 \Longrightarrow x^2 = 9 \Longrightarrow x = \pm 3$.

Dobili smo tri nul-točke $0, 3, -3$.

Zadatak 3.12. *Odredite nul točke funkcije* $f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$.

Rješenje.

Rješavamo jednadžbu $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$.

Prvo rješenje tražimo među djeliteljima slobodnog člana -3.

To su: $1, -1, 3, -3$.

Provjerimo prvu točku $1 : 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 1 - 3 = 0$.

Našli smo prvo rješenje.

Dalje dijelimo polinom $x^3 + 3x^2 - x - 3$ *polinomom* $x - 1$.

$(x^3 + 3x^2 - x - 3) \div (x - 1) = x^2 + 4x + 3$

$\underline{-x^3 + x^2}$

$4x^2 - x - 3$

$\underline{-4x^2 + 4x}$

$3x - 3$

$\underline{-3x + 3}$

0

Ostale nul točke su nul-točke polinoma $x^2 + 4x + 3$.

Rješavamo $\quad x^2 + 4x + 3 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{2} = \frac{-4\pm 2}{2} \Longrightarrow x_1 = -3 \qquad x_2 = -1$.

Dobili smo tri nul-točke $1, -1$ *i* -3.

Zadatak 3.13. *Jedna nul-točka polinoma* $p(x) = x^4 + 2x^3 - 23x^2 + 2x - 24$ *je* i. *Nađite ostale nul-točke.*

Rješenje.

Vrijedi: ako je $a + bi$ *nul-točka nekog polinoma, tada je i* $a - bi$ *nul-točka istog polinoma.*

U ovom zadatku znamo da je i $-i$ *nul-točka polinoma.*

Jedan faktor polinoma p *je* $(x - i)(x + i) = x^2 + 1$

Podijelimo polinom p *sa* $x^2 + 1$.

$$
\begin{array}{l}
(x^4 + 2x^3 - 23x^2 + 2x - 24) \div (x^2 + 1) = x^2 + 2x - 24 \\
\underline{-x^4 \qquad - x^2} \\
x^3 - 24x^2 + 2x - 24 \\
\underline{-2x^3 \qquad - 2x} \\
-24x^2 \qquad - 24 \\
\underline{24x^2 \qquad + 24} \\
0
\end{array}
$$

Ostale nul-točke tražimo među nul-točkama polinoma $x^2 + 2x - 24$.

$x^2 + 2x - 24 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{4+96}}{2} = \frac{-2\pm\sqrt{100}}{2} = \frac{-2\pm 10}{2}$

$x_1 = -6 \qquad x_2 = 4.$

Zadatak 3.14. *Funkcijom* $p(x) = 3x^2 - 7x - 88$ *opisan je prihod jednog poduzeća u ovisnosti o broju prodanih proizvoda* x.

a) *Koliki je prihod ako se proda* 300 *proizvoda?*

b) *Odredite razinu proizvodnje uz koju je prihod poduzeća jednak* 0.

Rješenje.

a) Da bismo izračunali prihod uz prodanih 300 *proizvoda potrebno je izračunati* $p(300) = 3 \cdot 300^2 - 7 \cdot 300 - 88 = 267\,812$.

b) Potrebno je naći nul-točke funkcije $p(x)$. *Rješavamo jednadžbu* $p(x) = 0$.

$3x^2 - 7x - 88 = 0 \Longrightarrow x_1 = -4.\,373$, $x_2 = 6.\,706\,9$. *Primijetimo kako rješenje* $x_1 = -4.\,373$ *nema ekonomskog smisla te ga odbacujemo. Naravno, diskutabilna je i ekonomska smislenost rješenja* $x_2 = 6.\,706\,9$, *budući da se ne radi o prirodnom broju.*

Zadatak 3.15. *Funkcijom* $p(t) = 100x - 500$ *opisana je dobit jednog poduzeća u ovisnosti o prodaji* (x). *Odredite kolika je dobit poduzeća ako se* *proda* 20 *proizvoda te dobit ako ne proda niti jedan proizvod. Odredite koliko minimalno poduzeće mora proizvoditi kako bi osiguralo pozitivnu dobit.*

Rješenje.
$p(20) = 100 \cdot 20 - 500... : 1500$
Ako proda 20 proizvoda dobit poduzeća je 1500 *kn.*
$p(0) = 100 \cdot 0 - 500 = -500$
Ako ne proda niti jedan proizvod dobit je negativna i iznosi -500 *kn.*
Za osigurati pozitivnu dobit treba vrijediti $.p(x) \geq 0$, *pa računamo:*
$100x - 500 \geq 0 \Longrightarrow x \geq 5.$
Dakle, da osigura pozitivnu dobit minimalno mora proizvoditi 5 *proizvoda.*

Zadatak 3.16. *Dane su funkcije* $f(x) = 12x^2 + 14x - 7$ *i* $g(x) = 4x - 8$. *Odredite funkciju* $h(x) = f(x) - g(x)$.
Rješenje.

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) - g(x) = 12x^2 + 14x - 7 - (4x - 8) = 12x^2 + 14x - 7 - 4x + 8 \\ &= 12x^2 + 10x + 1. \end{aligned}$$

Zadatak 3.17. *Funkcija potražnje nekog proizvoda u ovisnosti o cijeni tog proizvoda dana je s* $Q(p) = -3p + 178$. *Izrazite funkciju ukupnog prihoda u ovisnosti o cijeni.*
Rješenje.
Ukupni prihod je jednak umnošku cijene i količine pa je funkcija ukupnog prihoda jednaka $R(p) = pq = p(-3p + 178) = -3p^2 + 178p$.

Zadatak 3.18. *Prihod nekog poduzeća prikazan je u ovisnosti o prodaji pomoću funkcije* $p(x) = x^2 + 5x$, *a rashod funkcijom* $r(x) = \frac{1}{2}x^2$.
Odredite funkciju dobiti i kolika je dobit uz prodanih 500 *proizvoda.*
Rješenje.
Dobit poduzeća je jednaka ukupnim prihodima kojima oduzmemo ukupne rashode, tj $p(x) - r(x)$.
Funkcija dobiti (označimo je sa f*) je u našem primjeru jednaka* $f(x) = p(x) - r(x) = x^2 + 5x - \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x^2 + 5x$.
$f(500) = \frac{1}{2} \cdot 500^2 + 5 \cdot 500 = 127\,500.$
Za prodanih 500 *proizvoda poduzeće će imati* 127 500.*kuna profita.*

Zadatak 3.19. *U nekoj tvrtki proizvodi se jedan proizvod X. Fiksni troškovi proizvodnje iznose* 14000 *kn mjesečno, a varijabilni* 120 *kn po komadu proizvoda. Izračunajte koliko se komada tog proizvoda mora proizvesti mjesečno da bi prihodi tvrtke bili jednaki troškovima ako se proizvod prodaje po cijeni od* 180 *kn po komadu.*

Rješenje.

Budući su fiksni troškovi 14000 *kn, a varijabilni* 120 *kn po komadu, jednadžbu ukupnih troškovi možemo zapisati s* $T(q) = 110q + 14000$.

Prihodi tvrtke jednaki su umnošku prodanih proizvoda q i prodajne cijene odnosno $R(q) = 180q$.

Prihodi su jednaki troškovima ako je $R(q) = T(q)$ *odnosno*

$180q = 110q + 14000$

$180q - 110q = 14000$

$70q = 14000$

$q = 200$

Da bi prihodi bili jednaki troškovima, potrebno je proizvoditi 200 komada proizvoda X mjesečno.

Zadatak 3.20. *U nekoj tvrtki proizvodi se jedan proizvod X. Fiksni troškovi proizvodnje iznose* 5680*kn mjesečno, a varijabilni* 60.50 *kn po komadu proizvoda. Izračunajte koliko se komada tog proizvoda mora proizvesti mjesečno da bi prihodi tvrtke bili jednaki troškovima ako se proizvod prodaje po cijeni od* 96 *kn po komadu.*

(Rješenje. $q = 160$.*)*

Zadatak 3.21. *Trgovac je odlučio formirati cijenu proizvoda "Superstaf" na sljedeći način: prvo izračuna cijenu po kojoj on otkupljuje proizvod od dobavljača, a to je otkupna cijena od x kuna, zatim cijenu poveća za* 50% *(marža) i zbog samo njemu poznatih razloga, na kraju formiranja cijene, cijenu još poveća za* 5 *kn. Formirajte funkciju koja će za zadanu otkupnu cijenu vraćati novoformiranu trgovčevu cijenu.*

(Rješenje. $f(x) = 1.05x + 5$.*)*

Zadatak 3.22. *Gospodin Jakov je odlučio oročiti x kn u jednu banku uz godišnju kamatnu stopu* 4% *i godišnji obračun kamata.*

a) *Odredite funkciju koja će opisivati stanje na računu nakon godine dana uz oročenih x kn.*

b) *Odredite stanje na računu nakon godine dana uz oročenih* 200 *kn.*

c) *Odredite funkciju koja će opisivati ukupne ostvarene kamate uz oročenih* x *kn.*

d) *Odredite ukupne ostvarene kamate uz oročenih* 200 *kn.*

(Rješenje. a) $f(x) = x + 0.04x$, *b)* $f(200) = 208$ *kn, c)* $g(x) = 0.04x$, *d)* $g(200) = 8$ *kn.)*

Zadatak 3.23. *Zadana je funkcija ukupnih troškova u ovisnosti o količini proizvodnje s* $T(q) = q^3 - 45q^2 + 137$. *Izrazite funkciju prosječnih troškova u ovisnosti o proizvodnji.*

Rješenje. Prosječan trošak proizvodnje dobivamo tako da ukupan trošak proizvodnje $T(q)$ *podijelimo sa razinom proizvodnje* q. $AT(q) = \frac{T(q)}{q} = q^2 - 45q + \frac{137}{q}$.

Zadatak 3.24. *Zadana je funkcija potražnje nekog proizvoda u ovisnosti o cijeni* p *s* $Q(p) = -p^2 + 5p + 6$. *Odredite*

a) *koliko će iznositi potražnja ako je* $p = 3$

b) *koliko će iznositi cijena ako je potražnja jednaka* $q = 3.25$

Rješenje. a) $Q(3) = 12$, *b)* $-p^2 + 5p + 6 = 3.25$ *odakle uz uvjet* $p > 0$

slijedi da je $p = 5.5$.

Zadatak 3.25. *Zadana je funkcija potražnje nekog proizvoda* $Q(p)$ *u ovisnosti o cijeni* p $Q(p) = -p^2 + 2p + 8$.

a) *Za koje vrijednosti cijena ova funkcija ima ekonomskog smisla?*

b) *Koliko će iznositi potražnja ako je* $p = 3$

c) *Koliko će iznositi cijena ako je potražnja jednaka* $q = 5$*?*

Rješenje. a) jednadžba $-p^2 + 2p + 8 = 0$ *daje rješenja* $p_1 = -2$ *i* $p_2 = 4$, *a zbog okrenutosti parabole prema dolje i uvjeta* $p \geq 0$ *dobivamo da funkcija ima ekonomskog smisla za* $p \in [0, 4]$, *b)* $Q(3) = 5$, *c)* $p = 3$.

Zadatak 3.26. *Zadana je funkcije potražnje u ovisnosti o cijeni* $Q(p) = -p^2 + p + 20$. *Odredite*

a) *za koje cijene funkcija potražnje ima ekonomskog smisla,*

b) *koliko iznosi potražnja ako je cijena* $p = 4$,

c) *koliko će iznositi cijena ako je potražnja jednaka* $q = 18$?

Rješenje. a) $p \in [0, 5]$,*b)* $Q(4) = 8$.*c)* $p = 2$.

Zadatak 3.27. *Funkcija ponude nekog proizvoda dana je s* $s(p) = ap + b$, *gdje su* a *i* b *realni brojevi. Odredite parametre funkcije ponude ako je poznato da je* $s(1) = 147$ *i* $s(10) = 165$.

Rješenje.

$s(1) = a + b = 147$

$s(10) = 10a + b = 165$

Dobiveni sustav možemo riješiti nekom od metoda za rješavanje sustava jednadžbi pri čemu se dobiva rješenje $a = 2$ *i* $b = 145$.

Zadatak 3.28. *Funkcija potražnje nekog proizvoda dana je s* $d(p) = ap + b$, *gdje su* a *i* b *realni brojevi. Odredite parametre funkcije ponude ako je poznato da je* $d(10) = 145$ *i* $d(100) = 100$.

Rješenje.

$d(10) = 10a + b = 145$

$d(100) = 100a + b = 100$

Dobiveni sustav možemo riješiti nekom od metoda od metoda za rješavanje sustava jednadžbi pri čemu se dobiva rješenje $a = -\frac{1}{2}$ *i* $b = 150$.

Zadatak 3.29. *Funkcija potražnje nekog proizvoda dana je s* $s(p) = ap^2 + bp + c$, *gdje su* a, b *i* c *realni brojevi. Odredite parametre funkcije ponude ako je poznato da je* $s(2) = 16$, $s(4) = 18$ *i* $s(8) = 10$.

Rješenje.

$s(2) = 4a + 2b + c = 16$

$s(4) = 16a + 4b + c = 18$

$s(8) = 64a + 8b + c = 10$

Dobiveni sustav možemo riješiti nekom od metoda metoda za rješavanje sustava jednadžbi pri čemu se dobiva rješenje $a = -2$, $b = 12$ *i* $c = 14$.

Zadatak 3.30. *Funkcija potražnje nekog proizvoda dana je s* $d(p) = ap^2 + bp + c$, *gdje su* a, b *i* c *realni brojevi. Odredite parametre funkcije potražnje ako je poznato da je* $d(1) = 10$, $d(2) = 10$ *i* $d(4) = 4$.

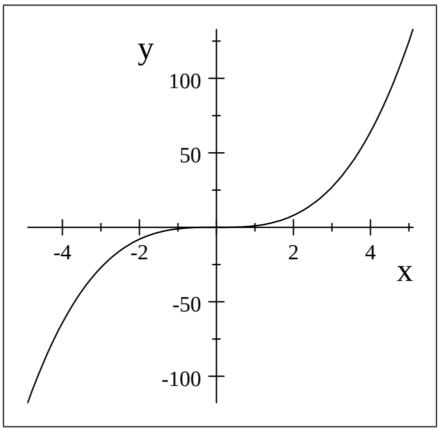
Rješenje.

$d(1) = a + b + c = 10$
$d(2) = 4a + 2b + c = 10$
$d(4) = 16a + 4b + c = 4$
Dobivamo rješenje $a = -1$, $b = 3$ *i* $c = 8$.

3.1.3 Globalna svojstva realnih funkcija

Reći ćemo da je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, **rastuća** na skupu $I \subset X$ ako za svaki $x_1, x_2 \in I$ vrijedi

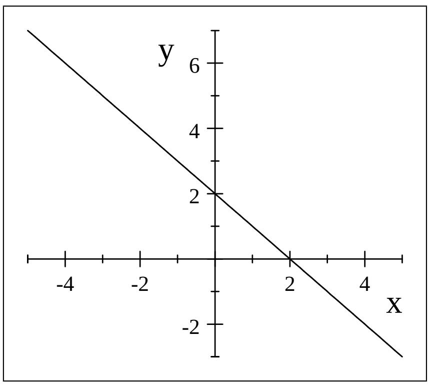
$$x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$



Primjer rastuće funkcije

Kažemo da je funkcija $f(x)$ **padajuća** na skupu I ako za svaki $x_1, x_2 \in I$ vrijedi

$$x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$



Primjer padajuće funkcije

Kažemo da je funkcija padajuća ako je padajuća na cijeloj domeni. Kažemo da je funkcija rastuća ako je rastuća na cijeloj domeni. Ako umjesto znaka nejednakosti u definiciji rastuće odnosno padajuće funkcije stavimo znak stroge nejednakosti tada govorimo o strogo rastućoj ili strogo padajućoj funkciji. Ako je funkcija rastuća ili padajuća na nekom intervalu I još kažemo da je funkcija **monotona** na intervalu I.

Pod pojmom ekstema podrazumijeva se minimum ili maksimum neke funkcije.

Funkcija $y = f(x)$ ima **lokalni minimum** u točki x_0 postoji interval $< a, b >$ koji sadrži tu točku ($x_0 \in < a, b >$) tako da vrijedi :

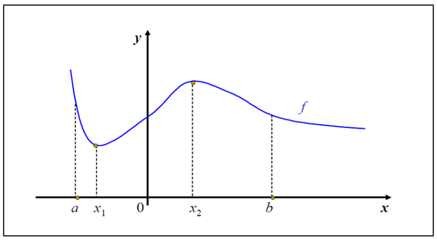
$$f(x_0) \leq f(x), \text{ za svaki } x \in < a, b > .$$

Funkcija $y = f(x)$ ima **lokalni maksimum** u točki x_0 postoji interval $< a, b >$ koji sadrži tu točku $x_0 \in < a, b >$) tako da vrijedi :

$$f(x_0) \geq f(x), \text{ za svaki } x \in < a, b > .$$

Napomenimo da se ovdije radi o pojmu lokalnog ekstrema, tj. vrijednost funkcije u toj točki je veća (u slučaju lokalnog maksimuma) ili manja (u slučaju lakalnog minimuma) od vrijednosti funkcije u svim okolnim točkama, ali to ne mora vrijediti za cijelo područje definicije funkcije. Ako to vrijedi za cijelo područje definicije funkcije, tada govorimo o **globalnom** ekstremu.

Primjer 3.4. *Zadan je graf funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*



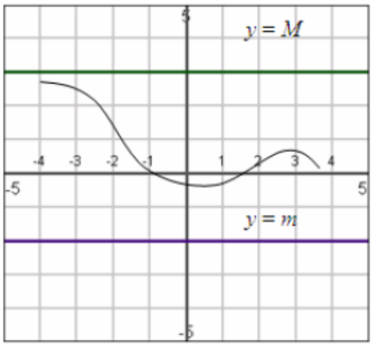
Na intervalu $< a, b >$ funkcija f ima dva lokalna ekstrema, i to lokalni minimum u točki x_1 i lokalni maksimum u točki x_2.

Reći ćrmo da je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, **omeđena odozgo** ako postoji realan broj M takav da je $f(x) \leq M$ za svaki $x \in X$.

Reći ćrmo da je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, **omeđena odozdo** ako postoji realan broj M takav da je $f(x) \geq M$ za svaki $x \in X$.

Reći ćemo da je funkcija omeđena ako je oeđena odozgo i odozdo. U suprotnom, ako funkcija nije omeđena, kažemo da je **neomeđena**.

Primjer 3.5. *Graf omeđene funkcije možemo omeđiti između dva pravca paralelna s osi x, $y = m$ i $y = M$.*

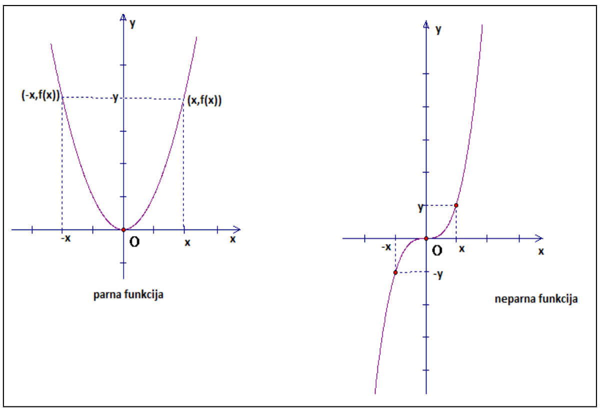


Primjer omeđene funkcije

Ako za svaki $x \in X$ vrijedi $f(-x) = f(x)$ onda funkciju f zovemo **parnom funkcijom**. U Kartezijevom koordinatnom sustavu graf parne funkcije je simetričan s obzirom na os ordinata (y-os).

Ukoliko za svaki $x \in X$ vrijedi $f(-x) = -f(x)$ funkciju f zovemo **neparnom funkcijom**. A graf neparne funkcije u Kartezijevom koordinatnom sustavu simetričan je s obzirom na ishodište koordinatnog sustava.

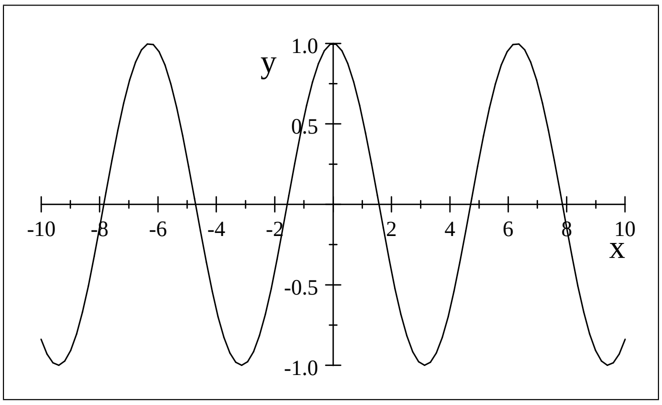
Primjer 3.6. *Funkcija $f(x) = 2x^2$ je parna, a funkcija $f(x) = x^3$ je neparna.*



Za funkciju $f : X \to \mathbb{R}$ kažemo da je **periodična** ako postoji realan broj $T \neq 0$ takav da za svaki $x \in X$ vrijedi:

$$\begin{aligned} x &\in X \Rightarrow x + T \in X \text{ i } x - T \in X \\ f(x+T) &= f(x) \end{aligned}$$

Najmanji takav pozitivan broj ako postoji, zove se temeljnim (osnovnim) periodom funkcije.



Periodična funkcija

3.2 Kompozicija funkcija

Primjer 3.7. *Neka je* $f(x) = 2x^2 + 4$*, odredite* $f(x-1)$ *i* $f(x+1)$.

Rješenje.

$f(x-1) = 2(x-1)^2 + 4 = 2(x^2 - 2x + 1) + 4 = 2x^2 - 4x + 6.$

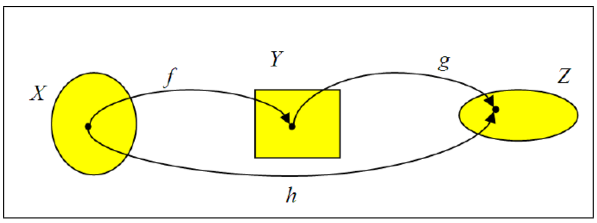
$f(x+1) = 2(x+1)^2 + 4 = 2(x^2 + 2x + 1) + 4 = 2x^2 + 4x + 6.$

Neka su X, Y i Z neprazni sukpovi te neka su $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ funkcije. Definiramo **kompoziciju funkcija** f i g u oznaci $h = f \circ g$, $h : X \to Z$,

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

odnosno kompoziciju funkcija g i f, u oznaci $g \circ f$, sa

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$



Kompozicija funkcija

Napomena: Komponiranje funkcija nije komutativno, tj. općenito ne vrijedi: $f \circ g \neq g \circ f$.

Primjer 3.8. *Pretpostavimo da je cijena linearna funkcija vremena* $p(t) = -0.3+1.7t$ *te neka je zadana funkcija potražnje u ovisnosti o cijeni proizvoda* $Q(p) = -0.22p^2 + 5p - 7$*.Izrazimo količinu potražnje u ovisnosti o vremenu. Matematički, tražimo kompoziciju funkcija* Q *i* p*.*

Imamo: $Q(p) = -0.22p^2 + 5p - 7 \Longrightarrow Q(t) = -0.22(-0.3 + 1.7t)^2 + 5(-0.3 + 1.7t) - 7 = -0.6358t^2 + 8.7442t - 8.5198$.

Zadatak 3.31. *Zadane su funkcije* $f(x) = 4x + 5$ *i* $g(x) = 2x - 7$*. Odredite kompozicije* $f \circ g$ *i* $g \circ f$*. Zatim izračunajte* $(f \circ g)(2)$ *i* $(g \circ f)(2)$*.*

Rješenje.

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x - 7) = 4(2x - 7) + 5 = 8x - 28 + 5 = 8x - 23$
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(4x + 5) = 2(4x + 5) - 7 = 8x + 10 - 7 = 8x + 3$
$(f \circ g)(2) = 8 \cdot 2 - 23 = 16 - 23 = -7$
$(g \circ f)(2) = 8 \cdot 2 + 3 = 16 + 3 = 19.$

Zadatak 3.32. *Zadane su funkcije* $f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$ *i* $g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}$*. Odredite kompozicije* $f \circ g$ *i* $g \circ f$*.*

Rješenje.

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}) = \frac{1}{3}(\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}) - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}x + \frac{2}{9} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}x - \frac{1}{9}.$
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}) + \frac{2}{3} = \frac{1}{6}x - \frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \frac{1}{6}x + \frac{1}{2}.$

Zadatak 3.33. *Zadane su funkcije* $f(x) = x^2 + 2x - 5$ *i* $g(x) = x + 1$*. Odredite kompozicije* $f \circ g$ *i* $g \circ f$*.*

Rješenje.

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^2 + 2(x + 1) - 5 =$
$= x^2 + 2x + 1 + 2x + 2 - 5 = x^2 + 4x - 2.$
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 2x - 5) = x^2 + 2x - 5 + 1 = x^2 + 2x - 4.$

Zadatak 3.34. *Zadane su funkcije* $f(x) = \frac{3x+4}{3-x}$ *i* $g(x) = -x + 9$*. Odredite kompozicije* $f \circ g$ *i* $g \circ f$*.*

Rješenje.

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(-x + 9) = \frac{3(-x+9)+4}{3-(-x+9)} = \frac{-3x+27+4}{3+x-9} = \frac{-3x+31}{x-6}.$
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\frac{3x+4}{3-x}) = -\frac{3x+4}{3-x} + 9 = \frac{-3x-4+9(3-x)}{3-x} = \frac{-3x-4+27-9x}{3-x} =$
$= \frac{-12x+23}{3-x}.$

Zadatak 3.35. *Za zadane funkcije $f(x)$ i $g(x)$. Odredite kompozicije $f \circ g$ i $g \circ f$*

a) $f = -x^2 + 5$, $g = x - 3$

$(Rj.: (f \circ g)(x) = -x^2 + 6x - 4, (g \circ f)(x) = -x^2 + 2)$

b) $f = x^3$, $g = x^5$

$(Rj.: (f \circ g)(x) = x^{15}, (g \circ f)(x) = x^{15})$

c) $f = x^2 + 8x + 16$, $g(x) = -x + 1$

$(Rj.: (f \circ g)(x) = x^2 - 10x + 25,\ (g \circ f)(x) = -x^2 - 8x - 15)$

d) $f = \frac{x+5}{2x+2}$, $g(x) = x^2 + 1$

$(Rj.: (f \circ g)(x) = \frac{x^2+6}{2x^2+4},\ (g \circ f)(x) = \frac{5x^2+18x+29}{4x^2+8x+4}.$

Zadatak 3.36. *Zadane su funkcije $f(x) = 3x^2 + 5x$ i $g(x) = x - 2$. Riješite jednadžbu $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$.*

Rješenje.

$$(f \circ g)(x) = f(x-2) = 3(x-2)^2 + 5(x-2) = 3(x^2 - 4x + 4) + 5x - 10$$
$$= 3x^2 - 12x + 12 + 5x - 10 = 3x^2 - 7x + 2.$$

$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x^2 + 5x) = 3x^2 + 5x - 2.$

Rješavamo jednadžbu $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$

$$3x^2 - 7x + 2 = 3x^2 + 5x - 2$$

$-12x = -2$

$x = \frac{1}{6}.$

Zadatak 3.37. *Zadane su funkcije $f(x) = 2x + 1$ i $g(x) = x^2 + 4x + 3$. Riješite jednadžbu $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$.*

Rješenje.

$(f \circ g)(x) = 2(x^2 + 4x + 3) + 1 = 2x^2 + 8x + 7.$

$(g \circ f)(x) = (2x+1)^2 + 4(2x+1) + 3 = 4x^2 + 4x + 1 + 8x + 4 + 3 = 4x^2 + 12x + 8.$

Rješavamo jednadžbu $(\ f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$

$2x^2 + 8x + 7 = 4x^2 + 12x + 8$

$-2x^2 - 4x - 1 = 0$

$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{-4} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{-4} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{-4} \Longrightarrow x_1 = -1 - \frac{1}{2}\sqrt{2},\ x_2 = -1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}.$

Zadatak 3.38. *Neki je proizvod poskupio dva puta. Prvo je poskupio za* 10%, *zatim za* 15%. *Prikažimo posebnim funkcijama ova poskupljenja te jednom funkcijom oba poskupljenja (naravno, sve u ovisnosti o cijeni). Provjerite koliko je poskupio proizvod kojemu je početna cijena bila* 50 *kn.*

Rješenje.
Prvo poskupljenje: $f_1(x) = x + x\frac{10}{100} = \frac{110}{100}x.$
Drugo poskupljenje: $f_2(x) = x + x\frac{15}{100} = \frac{115}{100}x.$
Ukupno poskupljenje $f(x) = f_2(f_1(x)) = f_2(\frac{110}{100}x) = \frac{115}{100}\frac{110}{100}x = \frac{253}{200}x.$

$f(50) = \frac{253}{200}50 = 63.25.$

Zadatak 3.39. *U pogonu jednog poduzeća proizvode se visokokvalitetna vrata od materijala M. Cijena jednog kilograma materijala M jednaka je* 25 *kn. Da bi proizveli jedna vrata potrebno je* 60 *kg materijala M.*

a) *Uz pretpostavku da drugi troškovi ne postoje, formirajte funkciju koja će za danu količinu proizvedenih vrata x računati ukupan trošak proizvodnje.*

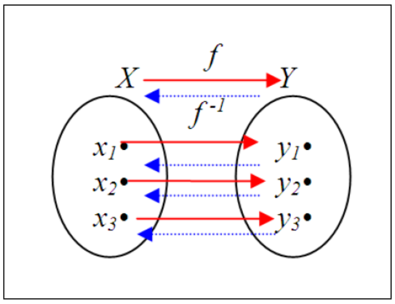
b) *Uz pretpostavku da drugi troškovi ne postoje, formirajte funkciju koja će za danu količinu proizvedenih vrata x računati ukupan trošak proizvodnje ako je cijena jednog kg materijala M porasla za* 20%.

c) *Uz pretpostavku da se u ukupnoj proizvodnji javljaju fiksni troškovi u visini* 7000 *kn, formirajte funkciju koja će za danu količinu proizvedenih vrata x računati ukupan trošak proizvodnje (uz jediničnu cijenu materijala M od* 25 *kn).*

Rješenje. a) $f(x) = 25 * 60x = 1500x$, *b)* $f(x) = 25 * 1.2 * 60x = 1800x$, *c)* $f(x) = 1500x + 7000$.

3.3 Inverzna funkcija

Neka je zadana funkcija $f : X \to Y$. Želimo odrediti funkciju koja će elementima kodomene pridružiti njihove originale. Takvo preslikavanje biti će (dobro definirana) funkcija ako je f bijekcija. Vrijedi: funkcija $f : X \to Y$ je bijekcija ako i samo ako postoji funkcija $g : Y \to X$ takva da je $g \circ f = 1_Y$ i $f \circ g = 1_Y$. Funkcija g je jedinstvena, bijekcija te je nazivamo **inverznom funkcijom** funkcije f i označavamo sa $g = f^{-1}(x)$.



Inverzna funkcija

Primjer 3.9. *Neka je $f : \{1, 2\} \longrightarrow \{a, b\}$ funkcija takva da je $f(1) = a$ i $f(2) = b$.*

Funkcija f je bijekcija i vrijedi $f^{-1} : \{a, b\} \longrightarrow \{1, 2\}$ takva da je $f^{-1}(a) = 1$ i $f^{-1}(b) = 2$.

Primjer 3.10. *Odredimo inverz funkcije $f(x) = 5x - 3$.*

Rješenje
$y = 5x - 3$
$5x = y + 3$
$x = \frac{y+3}{5}$
$f^{-1}(x) = \frac{x+3}{5}$.
Provjerimo je li $f(f^{-1}(x)) = x$.
$f(f^{-1}(x)) = f(\frac{x+3}{5}) = 5\frac{x+3}{5} - 3 = x + 3 - 3 = x$.
Analogno možemo provjeriti vrijedi li $f^{-1}(f(x)) = x$.
Drugi način traženja inverza (pomoću definicije):
Kako je $f(f^{-1}(x)) = x$ dobivamo
$5f^{-1}(x) - 3 = x$
$5f^{-1}(x) = x + 3$
$\Longrightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+3}{5}$.

Zadatak 3.40. *Odredite inverz funkcije $f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{7}$.*

Rješenje
$y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{7}$
$\frac{1}{3}x = y + \frac{1}{7}$
$x = 3y + \frac{3}{7}$
$\Longrightarrow f^{-1}(x) = 3x + \frac{3}{7}$.

Zadatak 3.41. *Odredite inverz funkcije* $f(x) = \frac{3x+2}{2x-4}$.

Rješenje.

$y = \frac{3x+2}{2x-4}$

$(2x-4)y = 3x+2$

$2xy - 3x = 4y + 2$

$x(2y-3) = 4y + 2$

$x = \frac{4y+2}{2y-3}$

$\Longrightarrow f^{-1}(x) = \frac{4x+2}{2x-3}$.

Zadatak 3.42. *Odredite inverz funkcije* $f(x) = x^5 + 6$.

Rješenje.

$y = x^5 + 6$

$x^5 = y - 6$

$x = \sqrt[5]{y-6}$

$\Longrightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[5]{x-6}$

Zadatak 3.43. *Odredite inverz funkcije* $f(x) = 27x^3$.

Rješenje.

$$y = 27x^3$$
$$x^3 = \frac{1}{27}y$$
$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{27}y}$$
$$x = \frac{1}{3}\sqrt[3]{y}$$
$$f^{-1}(x) = \frac{1}{3}\sqrt[3]{x}$$

Zadatak 3.44. *Odredite inverznu funkciju funkcije* $f(x) = 2e^{x-8} + 5$.

Rješenje.

$y = 2e^{x-8} + 5$

$2e^{x-8} = y - 5$

$e^{x-8} = \frac{y-5}{2}$ (*koristimo:* $\ln(e^x) = x$)

$x - 8 = \ln(\frac{y-5}{2})$

$x = \ln(\frac{y-5}{2}) + 8.$

$f^{-1}(x) = \ln(\frac{x-5}{2}) + 8.$

Zadatak 3.45. *Odredite inverznu funkciju funkcije* $f(x) = 3\ln(x-1)$.

Rješenje.

$y = 3\ln(x-1)$

$\ln(x-1) = \frac{y}{3}$

$x - 1 = e^{\frac{y}{3}}$

$x = e^{\frac{y}{3}} + 1$

$f^{-1}(x) = e^{\frac{x}{3}} + 1.$

Zadatak 3.46. *Odredite inverznu funkciju funkcije* $f(x) = 2^{6x+1} - 3$.

Rješenje.

$y = 2^{6x+1} - 3$

$2^{6x+1} = y + 3$

$6x + 1 = \log_2(y+3)$ (*Koristimo:* $\log_2 2^x = x$)

$x = \frac{\log_2(y+3)-1}{6}$

$\Longrightarrow f^{-1}(x) = \frac{\log_2(x+3)-1}{6}.$

Zadatak 3.47. *Odredite inverznu funkciju funkcije* $f(x) = 4\log(\frac{5x+5}{x-6})$.

Rješenje.

$y = 4\log(\frac{5x+5}{x-6})$

$\log(\frac{5x+5}{x-6}) = \frac{y}{4}$

$\frac{5x+5}{x-6} = 10^{\frac{y}{4}}$

$5x + 5 = (x-6)10^{\frac{y}{4}}$

$5x - 10^{\frac{y}{4}}x = -6 \cdot 10^{\frac{y}{4}} - 5$

$x = \frac{-6 \cdot 10^{\frac{y}{4}} - 5}{5 - 10^{\frac{y}{4}}} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x) = \frac{-6 \cdot 10^{\frac{x}{4}} - 5}{5 - 10^{\frac{x}{4}}}.$

Zadatak 3.48. *Zadana je funkcija ponude* $s(p) = 4p^2 - 8p$ *u ovisnosti o cijeni* p. *Izrazite cijenu* p *kao funkciju ponude* s.

Rješenje.

Da bismo odredili funkciju cijene p *u ovisnosti o ponudi* s *potrebno je odrediti inverznu funkciju funkcije* $s(p)$.

Inverznu funkciju kvadratne funkcije $s(p)$ *dobit ćemo svođenjem na potpuni kvadrat.*

$s = 4p^2 - 8p = (2p-2)^2 - 4$

$(2p-2)^2 = s + 4 \Longrightarrow p = \frac{\sqrt{s+4}+2}{2}.$

Zadatak 3.49. *Zadana je funkcija potražnje* $d(p) = -\frac{2}{3}p + 14$ *u ovisnosti o cijeni* p*. Odredite funkciju cijene u ovisnosti o potražnji.*

Rješenje. Odrediti funkciju cijene u ovisnosti o potražnji znači odrediti inverznu funkciju funkcije $d(p) = -\frac{2}{3}p + 14$*.*

$d = -\frac{2}{3}p + 14 \Rightarrow \frac{2}{3}p = 14 - d \Rightarrow p = 21 - \frac{3}{2}d.$

Slijedi da tražena funkcija glasi $p = 21 - \frac{3}{2}d.$

Zadatak 3.50. *Zadana je cijena* p *kao funkcija potražnje* $p = \frac{d+3}{d+1}$*. Izrazite potražnju* d *kao funkciju cijene* p*.*

(Rješenje:.$d = \frac{p-3}{1-p}$*).*

Zadatak 3.51. *Zadana je funkcija ponude* $s(p) = \frac{2}{3+p}$ *u ovisnosti o cijeni* p*. Odredite funkciju cijene u ovisnosti o ponudi.*

Rješenje.

Odrediti funkciju cijene u ovisnosti o ponudi znači odrediti inverznu funkciju funkcije $s(p) = \frac{2}{3+p}$*.*

$s(p) = \frac{2}{3+p} \Rightarrow 3s + sp = 2 \Rightarrow sp = 2 - 3s \Rightarrow p = \frac{2-3s}{s}.$

Slijedi da tražena funkcija glasi $p = \frac{2}{s} - 3.$

Zadatak 3.52. *Zadana je funkcija potražnje* $d(p) = \frac{p-3}{p-5}$*. Odredite funkciju cijene u ovisnosti o potražnji.*

(Rješenje. $p = \frac{5d-3}{d-1}$*.)*

Zadatak 3.53. *Zadana je funkcija ponude* $s(p) = \frac{4-p}{p+3}$ *u ovisnosti o cijeni* p*. Odredite funkciju cijene u ovisnosti o ponudi.*

(Rješenje. $p = \frac{4-3s}{s+1}$*.)*

Zadatak 3.54. *Zadana je funkcija potražnje* $d(p) = -p^2 + 6p + 12$*. Odredite funkciju cijene u ovisnosti o potražnji.*

Rješenje.

Inverz kvadratne funkcije dobivamo svođenjem na potpuni kvadrat. Dodatno, uvažavamo činjenicu $p \geq 0$*.*

$d = -p^2 + 6p + 12$

$d = -(p-3)^2 + 21$

$(p-3)^2 = 21 - d$

$p - 3 = \sqrt{21 - d}$

$p = 3 + \sqrt{21 - d}.$

Zadatak 3.55. *Neki je proizvod poskupio za 25%. Neka je* $f(x) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *funkcija koja računa novu cijenu proizvoda koji je prije poskupljenja koštao*

x kuna. Odredite $f(x)$ i $f^{-1}(x)$ i za inverznu funkciju $f^{-1}(x)$ interpretirajte nezavisnu varijablu x i vrijednosti funkcije $f^{-1}(x)$.

Rješenje. $f(x) = 1.25x$, $f^{-1}(x) = \frac{1}{1.25}x = \frac{125}{100}x$.

Za inverznu funkciju $f^{-1}(x)$ vrijednost nezavisne varijable x predstavlja cijenu nakon poskupljenja, a vrijednost funkcije $f^{-1}(x)$ predstavlja cijenu prije poskupljenja. Dakle, funkcija $f(x)$ za zadanu cijenu prije poskupljenja računa cijenu nakon poskupljenja, dok funkcija $f^{-1}(x)$ za zadanu cijenu nakon poskupljenja računa cijenu prije poskupljenja.

Zadatak 3.56. *Gospodin Jakov namjerava oročiti x kuna u banci s godišnjom kamatnom stopom 3% (i godišnjim obračunom kamata).*

a) *Formirajte funkciju $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ koja će računati konačnu vrijednost uloga u visini x (nakon jedne godine).*

b) *Odredite konačnu vrijednost uloga u visini 20000 kn.*

c) *Odredite funkciju koja će za zadanu konačnu vrijednost uloga x računati početnu vrijednost uloga.*

d) *Odredite početnu vrijednost uloga ukoliko je konačna vrijednost uloga jednaka 20600 kn.*

(Rješenje. a) $f(x) = 1.03x$, b) $f(20000) = 20600$, c) Radi se o inverznoj funkciji funkcije f. $f^{-1}(x) = \frac{100}{103}x$, d) $f^{-1}(20600) = 20000$.)

Zadatak 3.57. *Zadana je funkcija ukupnih troškova nekog poduzeća $T(q) = 5q + 8$, pri čemu je q količina proizvodnje tog poduzeća. Za koje količine proizvodnje funkcija ukupnih troškova ima ekonomskog smisla? Koliki su fiksni troškovi proizvodnje? Koje je ekonomsko značenje koeficijenta 5 u funkciji $T(q)$?*

Rješenje. Funkcija ukupnih troškova ima ekonomskog smisla za $T(q) \geq 8$. Ovo smo izveli postavljanjem uvjeta $q \geq 0$.

Fisksni troškovi proizvodnje iznose $T(0) = 8$.

Ekonomsko značenje koeficijenta 5 (varijabilni trošak): ukoliko povećamo razinu porizvodnje za 1 jedinicu (q povećamo za 1), tada će se trošak proizvodnje povećati za 5.

3.4 Pregled elementarnih funkcija

3.4.1 Algebarske funkcije

Realne funkcije najčešće dijelimo na algebarske i transcedentne funkcije. Algebarske funkcije dobivaju se nizom algebarskih operacija (zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje, potenciranje cijelim ili razlomljenim eksponentom) koje se vrše nad nezavisnom varijablom x. Dijelimo ih na:

- Cijele racionalne funkcije (ili polinome)
- Razlomljene racionalne funkcije
- Iracionalne funkcije.

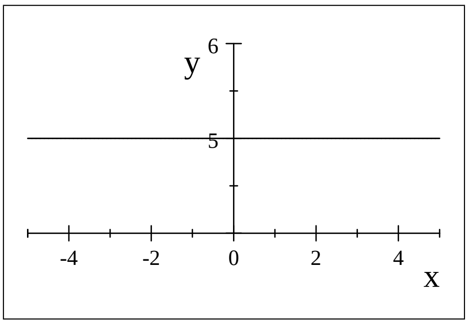
Cijele racionalne funkcije (polinomi)

Polinom n-tog stupnja je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oblika

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$$

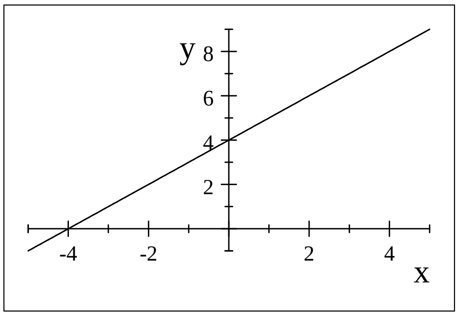
gdje su $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ koeficijenti polinoma, $n \in \mathbb{Z}^+, a_n \neq 0$.Pri tome je $a_n x^n$ vodeći član polinoma, dok je a_n vodeći koeficijent polinoma, a a_0 slobodni koeficijent polinoma. U slučaju kada je $a_n = 1$ kažemo da je polinom normiran.

Funkcija oblika $P_0(x) = a_0, a_0 \in \mathbb{R}$ je **polinom nultog stupnja** ili konstanta. Graf je pravac paralelan s x-osi i udaljen je od nje za a_0.



$f(x) = 5$

Polinom prvog stupnja je funkcija oblika $P_1(x) = a_1x + a_0, a_1, a_0 \in \mathbb{R}, a_1 \neq 0$. To je linearna funkcija čiji je graf pravac, gdje je a_1 koeficijent smjera (određuje nagib pravca), a a_0 odsječak pravca na y-osi. Funkcija je rastuća ukoliko je $a_1 > 0$, a ako je $a_1 < 0$ funkcija je padajuća. Nultočke polinoma prvog stupnja dobivamo rješavanjem jednadžbe jednadžba $P_1(x) = a_1x + a_0 = 0$, te je nultočka oblika: $x_0 = -\frac{a_0}{a_1}$.



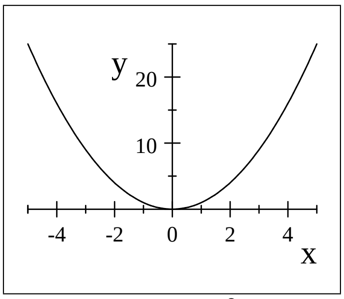
$f(x) = x + 4$

Funkcija oblika $P_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, a_2, $a_1, a_0 \in \mathbb{R}, a_2 \neq 0$ je **polinom drugog stupnja** ili kvadratna funkcija. Graf kvadratne funkcije nazivamo parabola.

Tjeme parabole, $T(x_T, y_T)$ je točka dana koordinatama

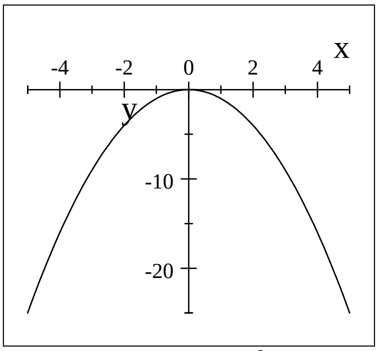
$$x_T = -\frac{a_1}{2a_2}, , y_T = \frac{4a_2a_0 - a_1^2}{4a_2}.$$

Ako je $a_2 > 0$ funkcija je padajuća na intervalu $< -\infty, x_T]$ i rastuća na intervalu $[x_T, +\infty >$. U točki T funkcija tada postiže minimum.



$f(x) = x^2$

Ako je $a_2 < 0$ funkcija je rastuća na intervalu $< -\infty, x_T]$ i padajuća na intervalu $[x_T, +\infty >$. U točki T funkcija tada postiže maksimum.



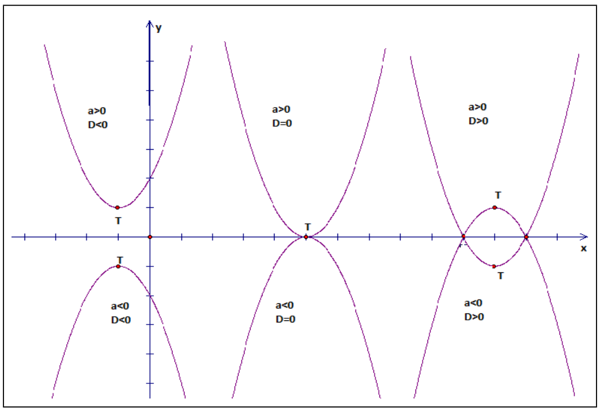
$f(x) = -x^2$

Nultočke dobivamo rješavanjem jednadžbe $P_2(x) = a_2x^2 + a_1x^1 + a_0 = 0$.Rješenje dobivamo pomoću formule

$$x_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}.$$

Kvadratna funkcija, ovisno o diskriminanti $D = a_1^2 - 4a_2a_0$, može imati dvije različite realne nultočke, jednostruku realnu nultočku ili ne imati realne nultočke:

- $D > 0 \Rightarrow 2$ različite realne nultočke
- $D = 0 \Rightarrow$ jedna dvostruku realnu nultočku
- $D < 0 \Rightarrow$ nema realnih nultočaka (nultočke su konjugirani kompleksni brojevi)



Kvadratna funkcija

Općenito, nultočke ili korijeni polinoma $P_n(x)$ su oni $x \in \mathbb{R}$ za koje je $P_n(x) = 0$. Izjednačavanjem polinoma s nulom $P_n(x) = 0$ dobivamo algebarsku jednadžbu $n - tog$ stupnja. Vrijede sljedeće tvrdnje:

1. Osnovni stavak algebre: svaki polinom stupnja $n \geq 1$ ima barem jednu nultočku (u skupu kompleksnih brojeva).
2. Ako su $x_1, x_2, ..., x_n$ nultočke polinoma $P_n(x)$, tada se on može prikazati u obliku (faktorizirati):

   a) Ako su $x_1, x_2, ..., x_n$ jednostruke nultočke polinoma:

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n).$$

b) Ako su $x_1, x_2, ..., x_m$ višestruke nultočke polinoma kratnosti $k_1, k_2, ..., k_m$ redom (x_i je "nultočka k_i puta "), pri čemu je $k_1+k_2+...+k_m = n$.

$$P_n(x) = a_0(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}...(x-x_m)^{k_m}.$$

Razlomljene racionalne funkcije

Racionalna funkcija u svom prikazu predstavlja kvocijent dvaju polinoma,

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

pri čemu je $P_n(x)$ polinom stupnja n, a $Q_m(x)$ polinom stupnja m. Ako je polinom u brojniku manjeg stupnja od polinoma u nazivniku $n < m$, funkciju $f(x)$ zovemo pravom racionalnom funkcijom. U protivnom, imamo nepravu racionalnu funkciju. Nepravu racionalnu funkciju uvijek možemo prikazati u obliku zbroja polinoma i prave racionalne funkcije. Područje definicije racionalne funkcije je skup svih realnih brojeva osim skupa nultočaka polinoma u nazivniku.

Rastav na parcijalne razlomke Ovisno o karakteru nultočaka nazivnika,

racionalnu funkciju možemo rastaviti na parcijalne razlomke, odnosno prikazati je u obliku zbroja razlomaka kod kojih su u nazivnicima faktori polinoma $P_n(x)$. Ako polinom u nazivniku ima realnu nultočku višestrukosti k tada imamo niz parcijalnih razlomaka:

$$\frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + ... + \frac{A_k}{(x-x_1)^k}$$

gdje su A_i konstante koje je potrebno odrediti.

Primjer 3.11. *Na ovome primjeru pokazati ćemo dva načina za rastav na parcijalne razlomke funkcije* $f(x) = \frac{5x+1}{(x-1)(x+10)}$.

Nul-točke nazivnika su 1 *i* -10 *i obe su jednostruke. To znači da funkciju* f *možemo rastaviti:*

$$f(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+10}$$

tj.,

$$\frac{5x+1}{(x-1)(x+10)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+10}.$$

Množenjem sa $(x-1)(x+10)$ *(rješavamo se razlomaka) dobivamo*

$$5x+1=A(x+10)+B(x-1).$$

Potrebno je izračunati koeficijente A *i* B. *To možemo na dva načina:*

1. *način (uvrštavanjem nul-točaka)*

   U relaciju $5x+1=A(x+10)+B(x-1)$ *uvrštavamo nul-točke (ovdje* 1 *i* -10*) te dobivamo dvije jednadžbe iz kojih dobivamo koeficijente* A *i* B.

   Uvrstimo prvo nul-točku $1:$

   $5+1=A(1+10)+B(1-1)\Longrightarrow 6=11A\Longrightarrow A=\frac{11}{6}.$

   Dalje, uvrštavamo nul-točku $-10:$

   $-50+1=A(-10+10)+B(-10-1)\Longrightarrow -49=-11B\Longrightarrow B=\frac{49}{11}.$

Dobivamo rastav na parcijalne razlomke:

$$f(x)=\frac{\frac{11}{6}}{x-1}+\frac{\frac{49}{11}}{x+10}=\frac{11}{6(x-1)}+\frac{49}{11(x+10)}.$$

2. način (izjednačavanjem polinoma)

   Koristimo teorem o jednakosti polinoma, tj. izjednačavamo koeficijente ispred istih potencija.

   Raspišemo relaciju $5x+1=A(x+10)+B(x-1)$.

$$\begin{aligned} 5x+1 &= Ax+10A+Bx-B \\ 5x+1 &= x(A+B)+10A-B. \end{aligned}$$

   Polinom s desne strane mora biti jednak onomu s lijeve, što znači da im koeficijenti uz iste potencije moraju biti jednaki, pa imamo

$$\begin{aligned} 5 &= A+B\Longrightarrow A=5-B \\ 1 &= 10A-B \end{aligned}$$

$$1 = 10(5 - B) - B$$

$$11B = 49 \Longrightarrow B = \frac{49}{11}$$

$$A = 5 - B = 5 - \frac{49}{11} = \frac{55 - 49}{11} = \frac{6}{11}$$

Ponovo dobivamo rastav: $f(x) = \frac{\frac{11}{6}}{x-1} + \frac{\frac{49}{11}}{x+10} = \frac{11}{6(x-1)} + \frac{49}{11(x+10)}$.

Zadatak 3.58. *Rastavite na parcijalne razlomke funkciju* $f(x) = \frac{12x^2+12}{x^3-x^2-6x}$.

Rješenje.

Najprije moramo odrediti nul-točke nazivnika.
Rješavamo jednadžbu $x^3 - x^2 - 6x = 0$.

$$x(x^2 - x - 6) = 0$$

$$\swarrow \qquad \searrow$$

$$x = 0 \qquad x^2 - x - 6 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = 3 \qquad x_2 = -2$$

Sve su nul-točke jednostruke pa funkciju možemo rastaviti na slijedeći način:

$$f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3}$$

tj.,

$$\frac{12x^2 + 12}{x^3 - x^2 - 6x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3}.$$

Kada se riješimo razlomka (množenjem sa $x(x+2)(x-3)$*) dobivamo:*

$$12x^2 + 12 = A(x+2)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x+2).$$

Dalje, tražimo koeficijente $A; B; C$

1. *način: uvrštavamo nul-točke u jednakost*

$$12x^2 + 12 = A(x+2)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x+2).$$

$0:$ $\quad 12 = A \cdot 2 \cdot (-3) \Longrightarrow -6A = 12 \Longrightarrow A = -2$

$-2:$ $\quad 12 \cdot 4 + 12 = B \cdot (-2)(-2-3) \Longrightarrow 60 = 10B \Longrightarrow B = 6$

$3:$ $\quad 12 \cdot 9 + 12 = C \cdot 3 \cdot (3+2) \Longrightarrow 120 = 15C \Longrightarrow C = 8$

Sada možemo zapisati rastav:

$$f(x) = \frac{-2}{x} + \frac{6}{x+2} + \frac{8}{x-3}.$$

2. način (izjednačavanjem koeficijenata) polinoma u jednakosti

$$12x^2 + 12 = A(x+2)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x+2)$$
$$12x^2 + 12 = A(x^2 - x - 6) + B(x^2 - 3x) + C(x^2 + 2x)$$
$$12x^2 + 12 = x^2(A+B+C) + x(-A-3B+2C) - 6A$$

Izjednačavamo koeficijente uz:

$x^2: \quad 12 = A + B + C$

$x: \quad 0 = -A - 3B + 2C$

$1: \quad 12 = -6A$

Rješavamo tri jednadžbe sa tri nepoznanice. Iz zadnje jednadžbe dobivamo $A = -2$ *i uvrstimo u prve dvije.*

$$12 = -2 + B + C \Longrightarrow 14 = B + C$$
$$0 = 2 - 3B + 2C \Longrightarrow -2 = -3B + 2C$$

Rješavanjem dviju jednadžbi dobivamo: $B = 6$ *i* $C = 8$.

$$f(x) = \frac{-2}{x} + \frac{6}{x+2} + \frac{8}{x-3}.$$

Zadatak 3.59. *Rastavite na parcijalne razlomke funkciju* $f(x) = \frac{2x^2+3x-15}{x^2(x-5)}$.

Rješenje.

Rješavanjem jednadžbe $x^2(x-5) = 0$ *dobivamo nul-točke* 0 *i* 5.

Kako je 0 *dvostruka nul-točka, dok je* 5 *jednostruka, pa funkciju* f *rastavljamo*

$$f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-5}$$
$$\frac{2x^2+3x-15}{x^2(x-5)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-5}.$$

Tražimo koeficijente A, B, C.

1. način (uvrštavanjem nul-točaka)

$$2x^2 + 3x - 15 = Ax(x-5) + B(x-5) + Cx^2$$

$0 : -15 = -5B \Longrightarrow B = 3$

$5 : 50 + 15 - 15 = 25C \Longrightarrow C = 2$

Primjetimo kako nismo dobili koeficijent A, a uvrstili smo sve nul-točke. Za izračunati A dovoljno je uvrstiti bilo koju drugu točku, uvrstimo, npr. 1.

$$2 + 3 - 15 = -4A - 4B + C$$

Kako smo već izračunali B i C, uvrstimo i njih

$$-10 = -4A - 12 + 2 \Longrightarrow 4A = 0 \Longrightarrow A = 0$$

Da smo uvrstili neku drugu točku dobili bismo isti A, pogledajmo za npr. $2:$

$$8 + 6 - 15 = -6A - 3B + 4C \Longrightarrow -1 = -6A - 1 \Longrightarrow A = 0$$

Dobili smo rastav

$$f(x) = \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x-5}.$$

2. način (jednakost polinoma)

Izjednačavamo koeficijente u polinomu $2x^2 + 3x - 15 = Ax(x-5) + B(x-5) + Cx^2$ *odnosno*

$2x^2 + 3x - 15 = x^2(A + C) + x(-5A + B) - 5B$

$x^2 : \quad 2 = A + C$

$x : \quad 3 = -5A + B$

$1 : \quad -15 = -5B \Longrightarrow B = 3$

Uvrstimo $B = 3$ u drugu jednadžbu $3 = -5A + 3 \Longrightarrow A = 0.$

Sada uvrstimo $A = 0$ u prvu jednadžbu $2 = A + C \Longrightarrow C = 2.$

Dobili smo rastav

$$f(x) = \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x-5}.$$

Zadatak 3.60. *Rastavite na parcijalne razlomke funkciju* $f(x) = \frac{3x^3+13x^2+11x+2}{x(x+1)^3}$.

Rješenje.

Tražimo nul-točke nazivnika: $x\left(x+1\right)^3$

$$x\left(x+1\right)^3 = 0$$

Dobivamo dvije nul- točke : 0 *i* -1, *od čega je* 0 *jednostruka nultočka, dok je* -1 *trostruka nultočka pa imamo rastav:*

$$f(x) = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} + \frac{D}{x}.$$

$$\begin{aligned} \frac{3x^3+13x^2+11x+2}{x\left(x+1\right)^3} &= \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} + \frac{D}{x} \\ 3x^3+13x^2+11x+2 &= Ax(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx + D(x+1)^3 \end{aligned}$$

Koeficijente A, B, C, D *računat ćemo uvrštavanjem točaka.*

$0: \quad 2 = D$

$-1: \quad -3+13-11+2 = -C \Longrightarrow C = -1$

Iskoristili smo sve nul-točke, dalje možemo uvrstiti bilo koje, npr. $1, 2$

$1: 3+13+11+2 = 4A+2B+C+8D$

$29 = 4A+2B-1+16 \Longrightarrow 4A+2B = 14 \Longrightarrow 2A+B = 14$

$2: 24+52+22+2 = 18A+6B+2C+27D$

$100 = 18A+6B-2+54 \Longrightarrow 18A+6B = 48 \Longrightarrow 9A+3B = 24$

Iz sustava jednadžbi $2A+B = 7$

$9A+3B = 24$

dobivamo $A = 1,\ B = 5$ *i rastav na parcijalne razlomke:*

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)} + \frac{5}{(x+1)^2} + \frac{-1}{(x+1)^3} + \frac{2}{x}.$$

Zadatak 3.61. *Rastavite na parcijalne razlomke funkcije*

a) $f(x) = \frac{-8x+19}{-x^2+7x+8}$

(*Rj.:* $f(x) = \frac{3}{x+1} + \frac{5}{x-8}$)

b) $f(x) = \frac{6x^2-29x+7}{x^2(x-7)}$

(*Rj.:* $f(x) = \frac{4}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{2}{x-7}$)

c) $f(x) = \frac{4x^2+3x+3}{x^3+x^2}$

(*Rj.:* $f(x) = \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x+1}$)

d) $f(x) = \frac{x^3+x^2+2x+2}{x^4+2x^3}$

(*Rj.:* $f(x) = \frac{3}{4(x+2)} + \frac{1}{4x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^3}$).

Zadatak 3.62. *Rastavite na parcijalne razlomke funkciju* $f(x) = \frac{x^5+x^3+x^2+1}{x^3-x}$.

Rješenje.

Ova funkcija nije prava racionalna funkcija pa najprije moramo podijeliti brojnik nazivnikom.

$(x^5 + x^3 + x^2 + 1) : (x^3 - x) = x^2 + 2$
$\underline{-x^5 + x^3}$
$2x^3 + x^2 + 1$
$\underline{-2x^3 + 2x}$
$x^2 + 2x + 1$

Dobivamo: $x^5 + x^3 + x^2 + 1 = (x^3 - x)(x^2 + 2) + x^2 + 2x + 1$
$\frac{x^5+x^3+x^2+1}{x^3-x} = \frac{(x^3-x)(x^2+2)+x^2+2x+1}{x^3-x} = x^2 + 2 + \frac{x^2+2x+1}{x^3-x}$
Dalje, rastavljamo $\frac{x^2+2x+1}{x^3-x}$ *na parcijalne razlomke. Tražimo nul-točke nazivnika.*

$$x^3 - x = 0. \implies x(x-1)(x+1) = 0$$

Dobivamo nul-točke: $0, 1, -1$, *sve jednostruke.*

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 - x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}.$$

Koeficijente A, B, C *tražimo uvrštavanjem nul-točaka.*

$$x^2+2x+1 = A(x-1)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)$$

$0: \quad 1 = -A \implies A = -1$
$-1: \quad 0 = 2C \implies C = 0$
$1: \quad 4 = 2B \implies B = 2$

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 - x} = \frac{-1}{x} + \frac{2}{x-1}$$

$$f(x) = \frac{x^5 + x^3 + x^2 + 1}{x^3 + x} = x^2 + 2 + \frac{-1}{x} + \frac{2}{x-1}.$$

Iracionalne funkcije

Kada se uz operacije koje vode do racionalne funkcije dopusti još i konačan broj korijena bilo kojeg stupnja, govorimo o iracionalnim funkcijama.

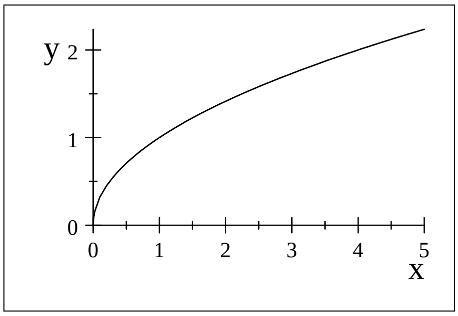
Na primjer, to su funkcije oblika

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt[m]{P_n(x)}}{\sqrt[n]{Q_m(x)}} \\ g(x) &= \sqrt{x+5} \\ h(x) &= \frac{\sqrt[4]{x^3-x}}{\sqrt[3]{x^5+x^3+x^2+1}} \end{aligned}$$

Kod iracionalnih funkcija treba posebno obratiti pažnju na prirodno područje definicije funkcije. Kada je funkcija oblika $f(x) = \sqrt[2n]{g(x)}$ (parni korijen) potrebno je osigurati da izraz ispod korijena bude nenegativan.

$$f(x) = \sqrt[2n]{g(x)} \Rightarrow g(x) \geq 0 \Rightarrow D_f = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \geq 0\} \cap D_g.$$

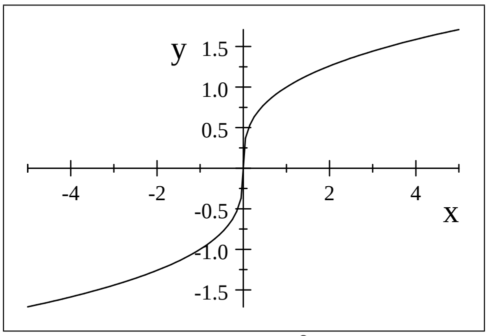
Primjer 3.12. *Dana je funkcija* $f(x) = \sqrt{x}$.



$f(x) = \sqrt{x}$

Domena ove funkcije je skup svih nenegativnih realnih brojeva. $D_f = [0, +\infty >= \mathbb{R}_0^+$.

Primjer 3.13. *Dana je funkcija* $f(x) = \sqrt[3]{x}$.



$f(x) = x^3$

Domena ove funkcije je skup svih realnih brojeva. $D_f = \mathbb{R}$.

3.4.2 Transcedentne funkcije

Funkcije koje nisu algebarske zovemo transcedentnima. Najvažnije transcedentne funkcije su:

1. Eksponencijalna funkcija
2. Logaritamska funkcija
3. Trigonometrijske funkcije
4. Ciklometrijske funkcije.

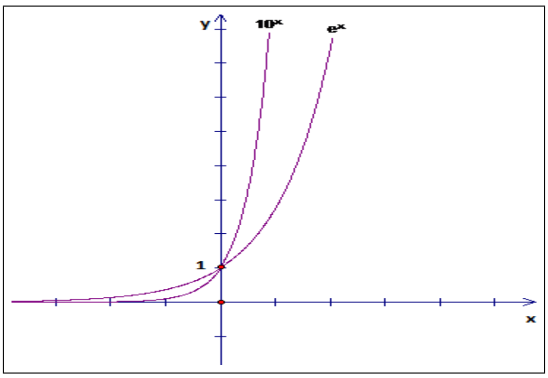
Eksponencijalna funkcija

Neka je $a > 0, a \neq 1$. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ oblika $f(x) = a^x$ nazivamo eksponencijalnom funkcijom.

Broj a zove se baza eksponencijalne funkcije. Područje definicije funkcije je skup svih realnih brojeva $\mathbb{R}$, dok je slika funkcije $\mathbb{R}^+$.

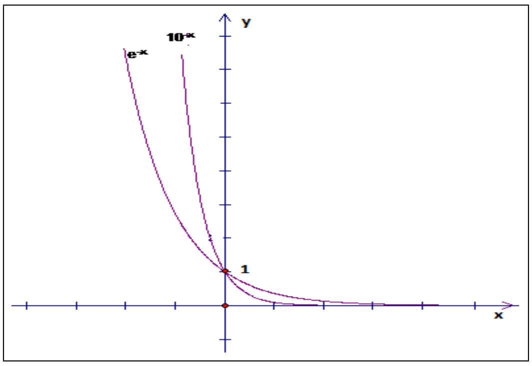
Vrijedi:

1. $a^x > 0$,za svaki $x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R} \backslash \{1\}$.
2. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.
3. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.
4. $(a^x)^y = a^{xy}$.
5. $a^0 = 1$.
6. Ako je $a > 1$ funkcija je rastuća, tj. za $x < y$ vrijedi $a^x < a^y$.



Rastuća eksponencijalna funkcija

7. Ako je $a \in < 0, 1 >$ funkcija je padajuća , tj.za $x < y$ vrijedi $a^x > a^y$.



Padajuća eksponencijalna funkcija

Grafovi eksponencijalnih funkcija prolaze točkom $(0, 1)$.

Specijalno, za $a = e = 2.71828182$ imamo funkciju $f(x) = e^x$ koju zovemo prirodna eksponencijalna funkcija.

Logaritamske funkcije

Inverzne funkcije eksponencijalnih funkcija zovemo logaritamskim funkcijama. Dakle, za eksponencijalnu funkciju $f(x) = a^x, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ njenu inverznu funkciju $f^{-1}(x) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ zovemo logaritamskom funkcijom $f^{-1}(x) = \log_a x$ s bazom a.

Graf funkcije je zrcalna slika eksponencijalne krivulje iste baze s obzirom na pravac $y = x$ (grafovi inverznih funkcija simetrični su s obzirom na pravac $y = x$).Grafovi logaritamskih funkcija prolaze točkom $(1, 0)$.

Vrijedi:

1. $\log_a a^x = x$,za svaki $x \in \mathbb{R}$
2. $a^{\log_a x} = x$,za svaki $x \in \mathbb{R}^+$
3. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
4. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
5. $\log_a x^y = y \cdot \log_a x$
6. $\log_a a = 1$
7. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

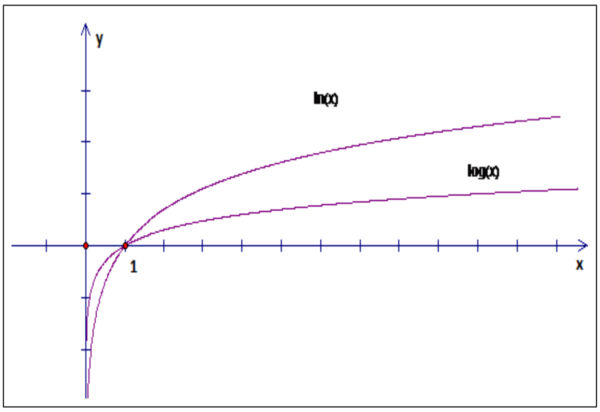
8. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

9. za svaki $a > 0, a \neq 1$ vrijedi $\log_a 1 = 0$

10. logaritamska funkcija je strogo monotona:

    ako je $a > 1$ logaritamska funkcija je rastuća, tj. za $x < y$ vrijedi $\log_a x < \log_a y$

    ako je $a \in < 0, 1 >$ logaritamska funkcija je padajuća, tj. $x < y$ vrijedi $\log_a x > \log_a y$.



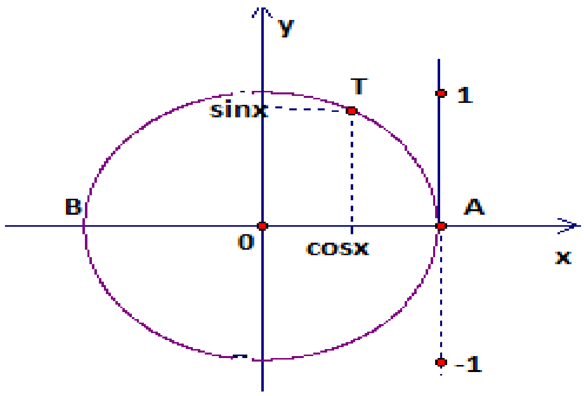
Logaritamska funkcija

Specijalno, za $a = e = 2.71828182$ funkciju $f(x) = \log_e x = \ln x$ zovemo prirodnim logaritmom.

Trigonometrijske funkcije

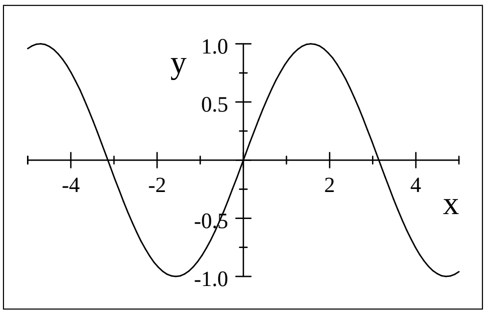
U Kartezijev koordinatni sustav smjestimo kružnicu zadanu jednadžbom $x^2 + y^2 = 1$ i brojevni pravac paralelan s y-osi u točku $A(1, 0)$.

Namatanjem pravca na kružnicu u geometrijski pozitivnom smjeru (obrnutom od smjera kretanja kazaljke na satu) pridružujemo svakom realnom broju x jedinstvenu točku T na kružnici. Na primjer, broju 0 pridružena je točka A, a broju π točka B. Takvu kružnicu nazivamo brojevnom ili trigonometrijskom kružnicom. Ordinata točke T je $\sin x$, a apcisa $\cos x \Rightarrow T(\cos x, \sin x)$. Tim postupkom svakom realnom broju t pridruženi su potpuno određeni brojevi $\sin t$ i $\cos t$.



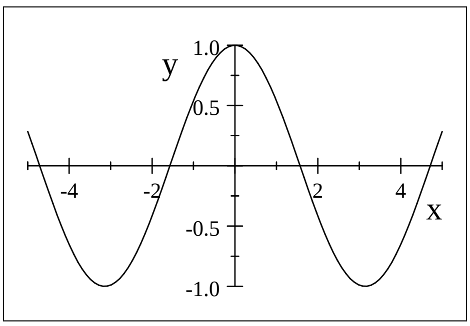
Drugim riječima, definirali smo funkcije:

- $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (sinus funkcija)



$f(x) = \sin x$

- $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (kosinus funkcija)

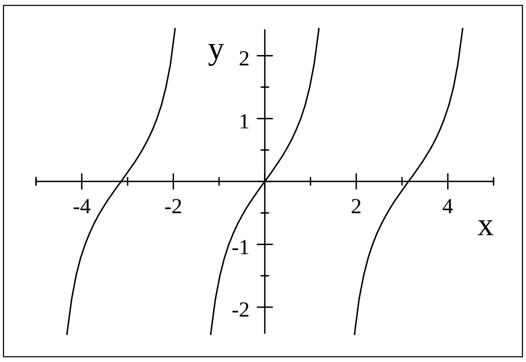


$f(x) = \cos x$

Primijetimo, funkcije sinus i kosinus su periodične s temeljnim periodom 2π.

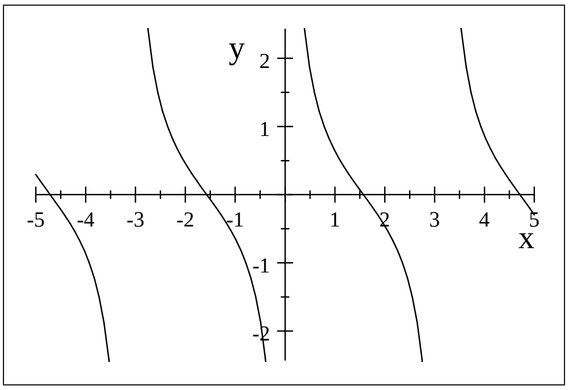
Pomoću funkcija $\sin x$ i $\cos x$ definiramo funkcije:

- $tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$(tangens)



$f(x) = tgx$

- $ctgx = \frac{\cos x}{\sin x}$



$f(x) = ctgx$

Primijetimo, funkcije tangens i kotangens su periodične s temeljnim periodom π.

Funkcije $\sin x, \cos x, tgx$ i $ctgx$ zovu se trigonometrijske funkcije.

Ciklometrijske funkcije ili arkus – funkcije

Trigonometrijske funkcije nisu bijektivne, pa općenito kao takve ne mogu imati inverzne funkcije. Ipak, ako promatrmo restrikcije trigonometrijskih funkcija, koje su bijektivne funkcije, možemo definirati njihove inverzne funkcije, odnosno arkus – funkcije ili ciklometrijske funkcije:

- Funkcija arkus sinus

  Funkcija $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}: [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ je strogo rastuća bijekcija.

  Njena inverzna funkcija definirana: $\arcsin = \sin^{-1} : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

- Funkcija arkus kosinus

  Funkcija $\cos|_{[0,\pi]}: [0,\pi] \to [-1,1]$ je strogo padajuća bijekcija.

  Njena inverzna funkcija definirana: $\arccos = \cos^{-1} : [-1,1] \to [0,\pi]$

- Funkcija arkus tangens

  Funkcija $tg\,|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}: [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ je strogo rastuća bijekcija.

  Njena inverzna funkcija definirana: $aectg = tg^{-1} : \mathbb{R} \to [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

- Funkcija arkus kotangens

  Funkcija $ctg\,|_{[0,\pi]}: [0,\pi] \to \mathbb{R}$ je strogo padajuća bijekcija.

  Njena inverzna funkcija definirana: $arctg = ctg^{-1} : \mathbb{R} \to [0,\pi]$

3.5 Prirodno područje definicije (domena) funkcije

U uvodnom dijelu ovog poglavlja već je definirana domena funkcije kao skup svih vrijednosti nezavisne varijable x za koju analitički izraz kojim je zadana funkcija ima smisla. Ponekad je potrebno ograničiti domenu funkcije (ne nužno uzeti $\mathbb{R}$). Primjerice, ukoliko funkcija $f(x) = 100x$ opisuje prihod poduzeća za prodanih x proizvoda, tada je, na primjer, prirodno ograničiti domenu na nenegativne vrijednosti.

Kako je u pregledu elementarnih funkcija opisana i domena elementarnih funkcija, dajmo pregled domena funkcija s kojima ćemo se najčešće susretati.

- ALGEBARSKE FUNKCIJE

  * CIJELE RACIONALNE FUNKCIJE (POLINOMI)

    Domena je čitav skup $\mathbb{R}$.

  * RAZLOMLJENE RACIONALNE FUNKCIJE

    Domena je čitav skup $\mathbb{R}$ bez nultočaka polinoma u nazivniku.

* IRACIONALNE FUNKCIJE

Problem određivanja domene svodi se na rješavanje algebarskih jednadžbi i nejednadžbi.

Uvjeti iz kojih dobivamo jednadžbe i nejednadžbe je:

Argument parnog korijena mora biti nenegativan,tj

$f(x) = \sqrt[2n]{g(x)} \Longrightarrow D_f = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \geq 0\} \cap D_g.$

- TRANSCEDENTNE FUNKCIJE

* EKSPONENCIJALNA FUNKCIJA

Domena je cijeli $\mathbb{R}$.

* LOGARITAMSKA FUNKCIJA

Problem određivanja domene svodi se na rješavanje algebarskih jednadžbi i nejednadžbi.

Uvjet iz kojih dobivamo nejednadžbe:

Argument logaritma mora biti pozitivan.

$f(x) = \log_a(g(x)) \Longrightarrow D_f = \{x \in \mathbb{R} : g(x) > 0\}.$

Zadatak 3.63. *Odredite domenu funkcije* $f(x) = \frac{45}{x-3}$.

Rješenje.

Nazivnik mora biti različit od nule pa je jedina točka koja ne smije biti u domeni upravo nul-točka nazivnika.

$$\begin{aligned} x+3 &\neq 0 \\ x &\neq -3 \end{aligned}$$

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \backslash \{-3\}.$$

Zadatak 3.64. *Odredite domenu funkcije* $f(x) = \frac{3x}{2x^2+11x-6}$.

Rješenje.

Jedine točke koje ne pripadaju domeni su nul-točke nazivnika.
Uvjet je $2x^2 + 11x - 6 \neq 0$.
$x_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{121+48}}{4} = \frac{-11 \pm \sqrt{169}}{4} = \frac{-11 \pm 13}{4} \Longrightarrow x_1 = -6 \qquad x_2 = \frac{1}{2}$

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \backslash \{-6, \frac{1}{2}\}.$$

Zadatak 3.65. *Odredite domenu funkcije* $f(x) = \sqrt{x+7}$.

Rješenje.

U ovoj funkciji moramo osigurati da argument korijena bude veći ili jednak nuli, tj. rješavamo nejednadžbu

$$\begin{aligned} x+7 &\geq 0 \\ x &\geq -7 \\ \mathcal{D} &= [-7, +\infty\rangle. \end{aligned}$$

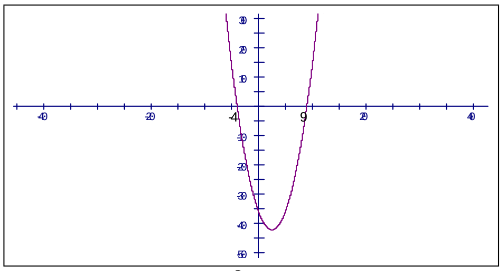
Zadatak 3.66. *Odredite domenu funkcije* $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x - 36}$.

Rješenje.

Postavljamo uvjet $x^2 - 5x - 36 \geq 0$. *Prisjetimo se, kvadratnu jednadžbu rješavamo tako da prvo tražimo nul-točke, a zatim iz skice čitamo područja pozitivnosti, odnosno negativnosti.*

$$x^2 - 5x - 36 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+144}}{2} \Longrightarrow x_1 = 9, x_2 = -4$$



$g(x) = x^2 - 5x - 36$

Sada iz grafa vidimo da ova kvadratna funkcija poprima pozitivne vrijednosti za sve x *manje od* -4 *i za sve veće od* 9, *tj.*

$$\mathcal{D} = \langle -\infty, -4] \cup [9, +\infty\rangle$$

Zadatak 3.67. *Odredite domenu funkcije* $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-4}}$.

Rješenje.

Sada moramo osigurati dva uvjeta: nazivnik mora biti različit od nule i argument korijena veći ili jednak nuli.

$1. x - 4 \neq 0$ $\qquad\qquad$ $2. \frac{x+1}{x-4} \geq 0$

Rješavamo prvi uvjet: $x \neq 4$.

I sada drugi uvjet: $\frac{x+1}{x-4} \geq 0$. *Riješit ćemo ga pomoću tablice. Prvo je potrebno naći nul-točke brojnika i nazivnika.*

$$x + 1 = 0 \Longrightarrow x = -1$$
$$x - 4 = 0 \Longrightarrow x = 4$$

U tablicu, ovisno o području, stavljamo oznaku "+" ako je izraz na tom području pozitivan, odnosno oznaku "−" ako je negativan.

Zatim množenjem predznaka $(+ \; i \; -)$ *dobivamo područja na kojima cjelokupan izraz poprima pozitivne, odnosno negativne vrijednosti.*

	$< -\infty, -1 >$	$< -1, 4 >$	$< 4, +\infty >$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$+$
$\frac{x+1}{x-4}$	$+$	$-$	$+$

Čitamo rješenje iz tablice pri čemu moramo paziti da ne uključimo nul-točku nazivnika $x = 4$.

$$\mathcal{D} = \langle -\infty, 1] \cup \langle 4, +\infty \rangle.$$

Zadatak 3.68. *Odredite domenu funkcije* $f(x) = \sqrt{\frac{x+6}{x^2+4x-21}}$.

Rješenje.

Imamo dva uvjeta: uvjet nazivnika i uvjet korijena.

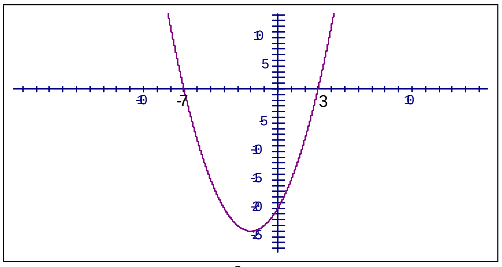
1. $x^2 + 4x - 21 \neq 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+84}}{2} \Longrightarrow x_1 = -7, \qquad x_2 = 3$

2. $\frac{x+6}{x^2+4x-21} \geq 0$

prvo računamo nul-točke brojnika i nazivnika.

$$x + 6 = 0 \Longrightarrow x = -6$$
$$x^2 + 4x - 21 = 0 \Longrightarrow x_1 = -7 \qquad x_2 = 3$$

Dalje, crtamo tablicu. Za odrediti područja negativnosti odnosno pozitivnosti kvadratne funkcije, skiciramo i čitamo iz skice.



$g(x) = x^2 + 4x - 21$

	$< -\infty, -7 >$	$< -7, -6 >$	$< -6, 3 >$	$< 3, +\infty >$
$x+6$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x^2+4x-21$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\frac{x+1}{x-4}$	$-$	$+$	$-$	$+$

$$\mathcal{D} = \langle -7, -6] \cup \langle 3, +\infty \rangle.$$

Zadatak 3.69. *Odredite domenu funkcije* $f(x) = \sqrt{\frac{x+4}{x-7}} + \sqrt{x^2 - 7x - 8}$.

Rješenje.

Kako je $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, *gdje je* $f_1(x) = \sqrt{\frac{x+4}{x-7}}$, *a* $f_2(x) = \sqrt{x^2 - 7x - 8}$, *domena funkcije* f *jednaka je presjeku domena funkcija* f_1 *i* f_2, *tj.*

$$D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2}.$$

Odredimo najprije domenu funkcije $f_1(x) = \sqrt{\frac{x+4}{x-7}}$.

Imamo dva uvjeta: 1. $\frac{x+4}{x-7} \geq 0$ *2.* $x - 7 \neq 0$.

Za domenu funkcije dobivamo $f_1(x)$ *(slično kao prethodni zadaci)*

$$D_{f_1} = < -\infty, -4] \cup < 7, +\infty > .$$

.

Analogno iz uvjeta $x^2 - 7x - 8 \geq 0$ *dobivamo domenu funkcije* $f_2(x) = \sqrt{x^2 - 7x - 8}$

$$D_{f_2} = < -\infty, -1] \cup [8, +\infty >,$$

te dobivamo

$$\begin{aligned} D_f &= D_{f_1} \cap D_{f_2} = (< -\infty, -4] \cup < 7, +\infty >) \cap (< -\infty, -1] \cup [8, +\infty >) \\ &= < -\infty, -4] \cup [8, +\infty > . \end{aligned}$$

Zadatak 3.70. *Odredite domenu funkcije* $f(x) = \ln(2x^2 + 5x - 12)$.

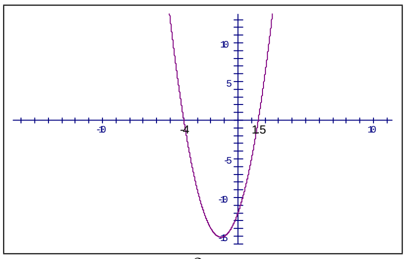
Rješenje.

Jedini uvjet je uvjet na pozitivnost argumenta prirodnog logaritma, tj.

$$2x^2 + 5x - 12 > 0.$$

Tražimo nul točke $2x^2 + 5x - 12 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+96}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{121}}{4} = \frac{-5 \pm 11}{4} \Longrightarrow x_1 = -4,\ x_2 = \frac{3}{2}$$



$g(x) = 2x^2 + 5x - 12$

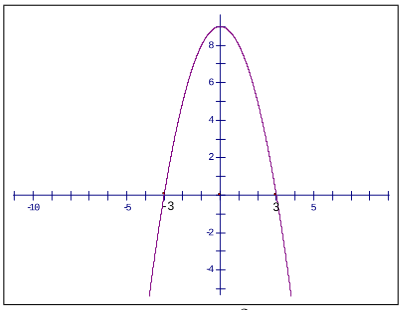
Iz grafa vidimo $\mathcal{D} = < -\infty, -4 > \cup < \frac{3}{2}, +\infty >$.

Zadatak 3.71. *Odredite domenu funkcije* $f(x) = \log(\frac{-x^2+9}{x^2})$.

Rješenje.

Imamo dva uvjeta: argument logaritma mora biti pozitivan i nazivnik mora biti različit od nule.

1. $\frac{-x^2+9}{x^2} > 0$ *kako je nazivnik* x^2 *uvijek veći ili jednak nuli, rješavamo* $-x^2 + 9 > 0$.



$g(x) = -x^2 + 9$

Iz grafa čitamo $D_1 =< -3, 3 >$.

2. $x^2 \neq 0. \Longrightarrow D_2 = \mathrm{R} \setminus \{0\}$.

Domenu dobivamo kao presjek područja određenih ovim uvjetima.

$\mathcal{D} = D_1 \cap D_2 = < -3, 3 > \setminus \{0\}$ *što možemo zapisati i kao* $\mathcal{D} = D_1 \cap D_2 = < -3, 0 > \cup < 0, 3 >$.

$$\mathcal{D} = < -3, 3 > \setminus \{0\}.$$

Zadatak 3.72. *Odredite domenu funkcije* $f(x) = \ln(\frac{x+6}{-x^2+4}) + \sqrt{x^3 + 4x^2 - 5x}$.

Rješenje.

Ovdje imamo tri uvjeta: na nazivnik, prirodni logaritam i korijen.

1. $-x^2 + 4 \neq 0 \Longrightarrow x \neq \pm 2$.

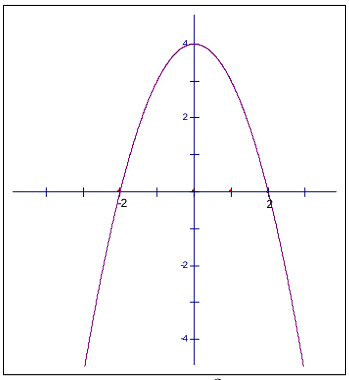
2. $\frac{x+6}{-x^2+4} > 0$

Rješavamo pomoću tablice. Prvo tražimo nul-točke, zatim crtamo tablicu. Još je potrebno nacrtati skicu kvadratne funkcije $-x^2 + 4$ *radi lakšeg određivanja predznaka.*

$x + 6 = 0 \Longrightarrow x = -6$

$-x^2 + 4 = 0 \Longrightarrow x = \pm 2$

Skica kvadratne funkcije $-x^2 + 4$



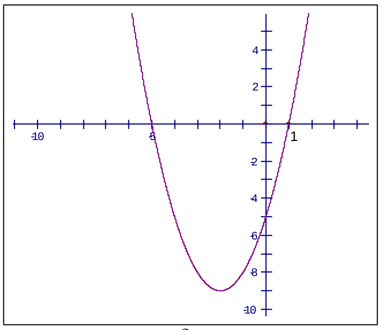
$g(x) = -x^2 + 4$

Tražimo rješenje drugog uvjeta

	$< -\infty, -6 >$	$< -6, -2 >$	$< -2, 2 >$	$< 2, +\infty >$
$x + 6$	$-$	$+$	$+$	$+$
$-x^2 + 4x$	$-$	$+$	$+$	$-$
$\frac{x+6}{-x^2+4}$	$+$	$+$	$+$	$-$

3. $x^3+4x^2-5x \geq 0 \Longrightarrow x(x^2+4x-5) \geq 0$

$x^2+4x-5=0 \Longrightarrow x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16+20}}{2} \Longrightarrow x_1=1, x_2=-5$



$g(x)=x^2+4x-5$

Tražimo rješenje trećeg uvjeta

	$<-\infty,-5>$	$<-5,0>$	$<0,1>$	$<1,+\infty>$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
x^2+4x-5	$+$	$-$	$-$	$+$
$x(x^2+4x-5)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Rješenje dobivamo presjekom sva tri uvjeta

$$(<-\infty,2>\backslash\{-2\}) \cap (<-5,0> \cup <1,+\infty>)$$

$$\mathcal{D}=<-5,0>\backslash\{-2\} \cup \ <1,2>.$$

Zadatak 3.73. *Nađite domenu funkcije* $f(x)=\sqrt{\ln(3x^2+5x-11)}$.

Rješenje.

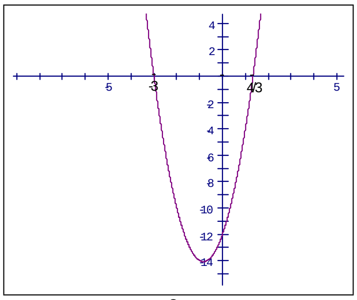
Imamo uvjet korijena i uvjet prirodnog logaritma.

1. $\ln(3x^2+5x-11) \geq 0 \Longrightarrow 3x^2+5x-11 \geq 1$

Sjetimo se, gornja relacija slijedi iz $\ln x \geq 0 \Longrightarrow x \geq 1$.

$3x^2+5x-11 \geq 1 \Longrightarrow 3x^2+5x-12 \geq 0.$

$3x^2+5x-12=0 \Longrightarrow x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25+144}}{6} \Longrightarrow x_1=-3, x_2=\frac{4}{3}$



$g(x) = 3x^2 + 5x - 12$

$$\mathcal{D} = < -\infty, -3] \cup [\frac{4}{3}, +\infty > .$$

2. $3x^2 + 5x - 11 > 0$

Primjetimo da smo u prvom dijelu imali uvjet $3x^2 + 5x - 11 \geq 1$. *Pa kako je drugi uvjet zadovoljen u prvom uvjetu, nije ga potrebno ponovo rješavati.*

Zadatak 3.74. *Odredite domene funkcija:*

a) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-x-6}{1-3x}}$

($Rj. : \mathcal{D} = < -\infty, -2] \cup < \frac{1}{3}, 3]$)

b) $f(x) = \log(-2x^2 + 23x - 30) + 7x$

($Rj. : \mathcal{D} = < \frac{3}{2}, 10 >$)

c) $f(x) = \sqrt{\frac{2-x}{3x+1}} + \ln(5x - x^2)$

($Rj. : \mathcal{D} = < 0, 2]$)

d) $f(x) = \ln(4x^3 - 36x)$

($Rj. : \mathcal{D} = < -3, 0 > \cup < 3, +\infty >$)

e) $f(x) = \sqrt{\ln(x^2 - 15)}$

($Rj. : \mathcal{D} = < -\infty, 4 > \cup < 4, +\infty >$)

f) $f(x) = \sqrt{\frac{x+7}{x-1}} + \sqrt{\frac{2x-4}{5-x}}$

($Rj. : \mathcal{D} = [2, 5 >$).

Zadatak 3.75. *Zadana je funkcija* $f(x)=\sqrt{\frac{9+4\cdot 2^x}{2^x-1}}$. *Odredite inverznu funkciju funkcije. Zatim odredite domenu inverzne funkcije.*

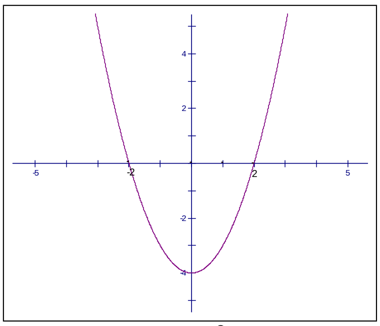
Rješenje.

Odredimo prvo inverznu funkciju.

$$
\begin{aligned}
y &= \sqrt{\frac{9+4\cdot 2^x}{2^x-1}} \;/^2 \\
y^2 &= \frac{9+4\cdot 2^x}{2^x-1} \;/(2^x-1) \\
y^2(2^x-1) &= 9+4\cdot 2^x \\
2^x(y^2-4) &= 9+y^2 \\
2^x &= \frac{9+y^2}{y^2-4} \\
x &= \log_2 \frac{9+y^2}{y^2-4}
\end{aligned}
$$

Dobili smo inverznu funkciju $f^{-1}(x)=\log_2\frac{9+x^2}{x^2-4}$.
Sada još moramo odrediti njenu domenu.
Dva su uvjeta: *1.* $\frac{9+x^2}{x^2-4}>0$ $\quad$ $2. x^2-4\neq 0$.

1. Rješavamo prvi uvjet: $\frac{9+x^2}{x^2-4}>0$.
Izraz $9+x^2$ *je uvijek veći od nule, dalje rješavamo samo* $x^2-4>0$.
Tražimo nultočke $x^2-4=0 \Longrightarrow x_{1,2}=\pm 2$. *i skiciramo funkciju* $g(x)=x^2-4$.



$g(x)=x^2-4$

Rješenje prvog uvjeta $<-\infty,-2>\cup<2,+\infty>$.
2. Rješavamo drugi uvjet: $x^2-4\neq 0$
$\Longrightarrow x_{1,2}\neq\pm 2$.

Domena je jednaka presjeku prva dva uvjeta, dobivamo $D_f=<-\infty,-2>\cup<2,+\infty>$.

3.6 Limes funkcije

3.6.1 Limes funkcije u točki

Neka je zadana funkcija $f(x)$. Ponekad nas zanima ponašanje funkcije u okolini točke c (pogotovo u slučajevima kada funkcija $f(x)$ u samoj točki c nije definirana). Htjeli bismo odrediti kojoj vrijednosti se približava $f(x)$ kada se x približava vrijednosti $c \in \mathbb{R}$, u oznaci $\lim\limits_{x \to c} f(x)$. Primijetimo da se točki c na realnoj osi možemo približavati s lijeve strane, u oznaci $x \to c^-$, ili s desne strane $x \to c^+$. Stoga razlikujemo dvije vrste limesa u točki, limes s lijeve strane $\lim\limits_{x \to c^-} f(x)$ i limes s desne starne $\lim\limits_{x \to c^+} f(x)$.Funkcija f ima limes u točki c $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ ako postoje limesi s lijeva i s desna i jednaki su $(\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = \lim\limits_{x \to c^+} f(x))$. Formalno, dajemo matematičku definiciju limesa:

Kažemo da je L granična vrijednost ili limes funkcije $y = f(x)$ kada x teži prema c ($x \to c$) i pišemo: $L = \lim\limits_{x \to c} f(x)$ ako za svaki realni broj $\varepsilon > 0$ postoji takav realni broj $\delta > 0$ tako da vrijedi $(0 < |x - c| < \delta) \Longrightarrow (|f(x) - L| < \varepsilon)$.

Drugim riječima, ma koliko malen ε uzmemo (tj. ma koliko blizu L se nalazmo) uvijek postoji realan broj δ takav da za svaki x iz okoline brojea c ($|x - c| < \delta$) odgovarajući $f(x)$ bude u ε okolini granice ili limesa L.

Tako, na primjer, možemo promatrati funkciju $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x-2}$. Odmah vidimo da točka 2 nije u domeni ove funkcije (jer je to nul-točka nazivnika) pa ni ne računamo $f(2)$, ali bismo mogli računati vrijednost funkcije u okolnim točkama i to onima koje su (jako) blizu točki 2, pri čemu se točki 2 možemo približavati s lijeve $(\lim\limits_{x \to 2^-} f(x))$ ili s desne strane $(\lim\limits_{x \to 2^+} f(x))$.

Pri računanju limesa moguća su 4 rezultata:

- Limes ne postoji
- Limes je realan broj
- Limes je jednak $+\infty$
- Limes je jednak $-\infty$

Prije opisivanja tehnika za računanje limesa, navedimo neka svojstva limesa.

Svojstva limesa
Ako je k konstanta, $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ i $\lim\limits_{x\to c} g(x) = M$, tada vrijedi:

1. $\lim\limits_{x\to c} k = k$
2. $\lim\limits_{x\to c} x = c$
3. $\lim\limits_{x\to c}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to c} f(x) \pm \lim\limits_{x\to c} g(x) = L \pm M$
4. $\lim\limits_{x\to c}[f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to c} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to c} g(x) = L \cdot M$
$\lim\limits_{x\to c} k \cdot f(x) = \lim\limits_{x\to c} k \cdot \lim\limits_{x\to c} f(x) = k \cdot L$
5. $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)} = \dfrac{L}{M}$, za $M \neq 0$
6. $\lim\limits_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to c} f(x)} = \sqrt[n]{L}$, za $L > 0$ i n paran broj

Ako se prilikom računanja limesa jedan ili oba limesa jednaka $+\infty$ ili $-\infty$, a drugi limes je jednak $a \in \mathbb{R}$, tada smijemo primijeniti sljedeća pravila za računanje sa $+\infty$ odnosno $-\infty$:

- $a + (\pm\infty) = (\pm\infty) + a = \pm\infty$, za svaki $a \in \mathbb{R}$
- $(-\infty) - (-\infty) = -\infty$
- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
- $a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = (\pm\infty)$, za svaki $a \in \mathbb{R}, a > 0$
- $a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = (\mp\infty)$, za svaki $a \in \mathbb{R}, a < 0$
- $(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$
- $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$
- $(-\infty) \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$
- $\frac{a}{\pm\infty} = 0$, za svaki $a \in \mathbb{R}$
- $\infty^r = \infty$, za $r > 0, r \in \mathbb{R}$
- $\infty -^r = 0$, za $r > 0, r \in \mathbb{R}$

Ako se prilikom računanja limesa dobije rezultat oblika: $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$ tada takve izraze nazivamo neodređenim oblicima, a pitanje o postojanju i rezultatu limesa ostaje otvoreno i potrebno je primijeniti daljnje tehnike za računanje traženog limesa.

3.6.2 Računanje limesa racionalne funkcije

Zadana je racionalna funkcija $f(x)$. Tražimo limes funkcije u točki c.Postoje dvije mogućnosti:

1. Funkcija je definirana u točki c.Tada možemo računati vrijednost funkcije u točki c, pa je i limes funkcije u toj točki jednak vrijednosti funkcije u toj točki, tj

   $$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

   Primjer 3.14. *Izračunajmo limes funkcije* $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$ *u točki* $x_0 = 1$.

   Kako je funkcija f *definirana u točki* 1, *možemo računati* $f(1)$, *pa je limes*

   $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x+1}{x-3} = f(1) = \frac{1+1}{1-3} = -1.$

2. Funkcija nije definirana u točki c.

   Ukoliko su vrijednosti polinoma u brojniku i u nazivniku za $x = c$ jednaki 0 tada dijelimo polinom u brojniku i polinom u nazivniku sa $x - c$ i ponavljamo postupak dok ne dođemo do funkcije koja je definirana u c.

   Primjer 3.15. *Izračunajmo limes funkcije* $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x-2}$ *u točki* 2.

   Kako funkcija f *nije definirana u* 2. *Računamo vrijednosti polinoma u brojniku i nazivniku u točki* 2.

   $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-5x+6}{x-2} = \frac{0}{0}.$

   Dijelimo i brojnik i nazivnik sa $(x-2)$.

   $(x^2 - 5x + 6) : (x - 2) = x - 3$

   $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-5x+6}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{(x-2)(x-3)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{x-3}{1} = \frac{2-3}{1} = -1.$

3. Ukoliko je vrijednost polinoma u nazivniku jednaka 0, a vrijednost polinoma u nazivniku nije 0, tada ćemo imati slučaj kada je limes jednak ∞. Detaljnijom analizom je potrebno odrediti radi li se o $+\infty$ ili $-\infty$.

Primjer 3.16. *Odredimo limes (odnosno limese s lijeva i s desna) funkcije* $f(x) = \frac{x^2-6}{x-1}$.

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-6}{x-1} = (\frac{-6}{0^-}) = +\infty.$$

Kako smo analizirali predznak:

Zanima nas kako predznak funkcije $f(x) = x-1$ *za brojeve manje od* 1. *Analizu predznaka možemo provesti na više načina: grafički (crtamo pravac* $y = x-1$*) i numerički: gledamo brojeve koji su manji od* 1 *i jako blizu* 1 *(probajte zamisliti* 0.99999*). Primjećujemo da za brojeve manje od* 1 *vrijedi* $x-1<0$ *(to možemo i provjeriti ako uvrstimo neki broj manji od* 1*, na primjer* $0.999-1=-0.001$*). Kako su i brojnik (uvrstili* 1*) i nazivnik negativni, konačni rezultat je pozitivan izraz.*

Izračunajmo sada limes s desna (analogna analiza, samo gledamo brojeve veće od 1*):*

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-6}{x-1} = (\frac{-6}{0^+}) = -\infty.$$

Dakle, vrijedi: ako se prilikom računanja limesa dobije reultat tipa:

- $\frac{a}{0}$, $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ tada je rezultat limesa $+\infty$ ili $-\infty$, a sam predznak određujemo daljnjom analizom.
- $\frac{0}{0}$, radi se o neodređenom obliku.

Zadatak 3.76. *Izračunajte limese*

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x+4}{x+1}$

b) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{2x+6}{x^2+x-6}$

c) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x^2+x-20}$

d) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^3+9x^2+23x+15}{x^3+x^2+4x+4}$.

Rješenje.

a)

$$\lim_{x\to 1} \frac{x+4}{x+1} = \frac{1+4}{1+1} = \frac{5}{2}$$

b)

$$\lim_{x\to-3}\frac{2x+6}{x^2+x-6}=(\frac{0}{0})=\lim_{x\to-3}\frac{2(x+3)}{(x+3)(x-2)}=\lim_{x\to-3}\frac{2}{x-2}=\frac{2}{-3-2}=-\frac{2}{5}$$

c)

$$\lim_{x\to4}\frac{x^2-16}{x^2+x-20}=(\frac{0}{0})=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(x+4)}{(x+5)(x-4)}=\lim_{x\to4}\frac{x+4}{x+5}=\frac{4+4}{4+5}=\frac{8}{9}$$

d)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-1}\frac{x^3+9x^2+23x+15}{x^3+x^2+4x+4} &= (\frac{0}{0})=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x+3)(x+5)}{(x+1)(x^2+4)}= \\ &= \lim_{x\to-1}\frac{(x+3)(x+5)}{x^2+4}=\frac{8}{5}.\end{aligned}$$

Zadatak 3.77. *Izračunajte limese*

a) $\lim\limits_{x\to-2^-}\frac{x}{x+2}$, $\lim\limits_{x\to-2^+}\frac{x}{x+2}$

b) $\lim\limits_{x\to7^-}\frac{x+1}{7-x}$, $\lim\limits_{x\to7^+}\frac{x+1}{7-x}$

c) $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{x+1}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x+1}{x^2}$

Rješenje.

a)

$$\lim_{x\to-2^-}\frac{x}{x+2}=(\frac{-2}{0})=\frac{-2}{0^-}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-2^+}\frac{x}{x+2}=(\frac{-2}{0})=\frac{-2}{0^+}=-\infty$$

b)

$$\lim_{x\to7^-}\frac{x+1}{7-x}=\frac{1}{0}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to7^+}\frac{x+1}{7-x}=\frac{1}{0}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

c)

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x+1}{x^2} = (\frac{1}{0}) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x+1}{x^2} = (\frac{1}{0}) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

3.6.3 Računanje limesa iracionalne funkcije

Računat ćemo limese funkcija koje u brojniku i nazivniku imaju iracionalne izraze i pri tome su limesi izraza u brojniku i nazivniku jednaki 0. Izrazi koji sadrže iracionalni izraz dovode se u racionalni oblik racionalizacijom ili supstitucijom.

Primjer 3.17. *Odredimo* $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$.

Uvjerimo se da se zbilja radi o slučaju $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1} = \frac{\lim_{x\to 1}(\sqrt{x+8}-3)}{\lim_{x\to 1}(x-1)} = \frac{\sqrt{1+8}-3}{1-1} = \frac{0}{0}.$$

.

Limes riješimo racionalizacijom

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{x+8}+3}{\sqrt{x+8}+3} &= \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x+8})^2 - 3^2}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+8-9}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)} = \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x+8}+3} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Zadatak 3.78. *Izračunajte* $\lim_{x\to -2} \frac{2x+4}{\sqrt{x+2}}$.

Rješenje.

Provjerimo da se radi o neodređenom obliku $\frac{0}{0}$. *Limes rješavamo racionalizacijom.*

$$\lim_{x\to -2} \frac{2x+4}{\sqrt{x+2}} \cdot \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}} = \lim_{x\to -2} \frac{(2x+4)\sqrt{x+2}}{x+2} = \lim_{x\to -2} 2\sqrt{x+2} = 2\sqrt{-2+2} = 0.$$

Zadatak 3.79. *Izračunajte limese*

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{x+1}}{2x}$ $\quad$ $(Rj. -\frac{1}{4})$.

b) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$ $\quad$ $(Rj.: 4)$.

c) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{2x+2}{\sqrt{x+1}}$ $\quad$ $(Rj.: 0)$.

d) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{\sqrt{x+4}-3}{x-5}$ $\quad$ $(Rj.: \frac{1}{6})$.

e) $\lim\limits_{x\to 5^-} \frac{1-x}{x-5}$ $\quad$ $(Rj.: +\infty)$

f) $\lim\limits_{x\to 5^+} \frac{1-x}{x-5}$ $\quad$ $(Rj.: -\infty)$

3.6.4 Limes u beskonačnosti

Nezavisna varijabla x može težiti prema $+\infty$ ili $-\infty$ i zanima nas ponašanje funkcije $f(x)$ u beskonačnosti i računamo $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ ili $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

Tada su mogući različiti slučajevi:

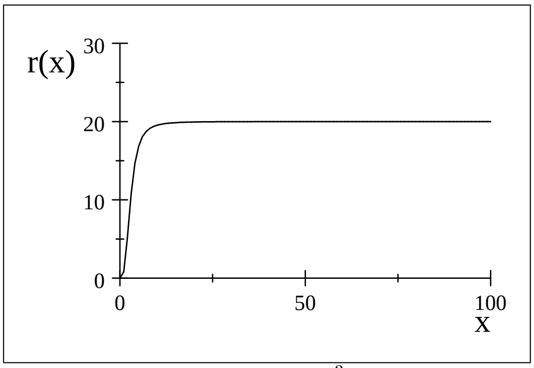
- Limes ne postoji
- Limes je realan broj
- Limes je jednak $+\infty$
- Limes je jednak $-\infty$

Svojstva limesa (1-6) opisana u odjeljku u kojem se obrađuje limes funkcije u točki, također vrijede i za limese u beskonačnosti.

U praksi nas može zanimati vrijednosti ekonomskih funkcija za velike vrijednosti inputa. Slijedi primjer.

Primjer 3.18. *Količina prodaje nekog novog proizvoda na tržištu ovisi o sredstvima uloženim u reklamu. Ta veza dana je izrazom $r(x) = \frac{100x^3}{5x^3+120}$, gdje su x sredstva uložena u reklamu, a $r(x)$ količina prodaje tog proizvoda. Odredite ponašanje prodaje za velika sredstva uložena u reklamu.*

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{100x^3}{5x^3+120} = \lim_{x\to +\infty} \frac{100}{5+\frac{120}{x^3}} = 20.$$



$r(x) = \frac{100x^3}{5x^3+120}$

Količina prodaje će za velika sredstva uložena u reklamu iznositi 20. Dakle, količina prodaje je ograničena s 20 i ne isplati se ulagati (neograničena) sredtva u reklamu budući da to neće dovesti do značajnog porasta broja prodanih proizvoda.

Primjerice,

$r(10) = \frac{100*(10)^3}{5*(10)^3+120} = 19.531$

$r(200) = \frac{100*(200)^3}{5*(200)^3+120} = 20.000$

Kod racionalnih funkcija limese u beskonačnosti računamo tako da brojnik i nazivnik podijelimo najvećom potencijom od x koja se nalazi u brojniku i nazivniku, te tada odredimo limes dobivenog izraza.

Primjer 3.19. *Odredimo* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+4}{3+2x^2}$.

Najprije odredimo najveću potenciju i u brojniku i u nazivniku, a to je x^2. *Dakle, i brojnik i nazivnik moramo podijeliti sa* x^2.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+4 \quad / : x^2}{3+2x^2 \quad / : x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{4}{x^2}}{\frac{3}{x^2}+2} = \frac{1+0}{0+2} = \frac{1}{2}$$

Zadatak 3.80. *Odredite* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x^3+2x^2+1}{4-x^3}$.

Rješenje.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3+2x^2+1 \quad / : x^3}{4-x^3 \quad / : x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}}{\frac{4}{x^3}-1} = \frac{3}{-1} = -3.$$

Zadatak 3.81. *Odredite* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3+4x-4}{x^2+2x}$.

Rješenje.

Najveća potencija je x^3 *pa i brojnik i nazivnik dijelimo sa* x^3.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+4x-4 \quad /:x^3}{x^2+2x \quad /:x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{4}{x^2}-\frac{4}{x^3}}{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}} = \frac{1+0-0}{0+0} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

Kako bismo odredili radi li se o $+\infty$ *ili* $-\infty$, *potrebno je analizirati predznak polinoma* x^2+2x, *on postiže pozitivne vrijednosti kako* $x\to+\infty$.

Zadatak 3.82. *Odredite limes* $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4x^2-6x}{5-3x^2}$.

Rješenje.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2-6x \quad /:x^2}{5-3x^2 \quad /:x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4-\frac{6}{x}}{\frac{5}{x^2}-3} = -\frac{4}{3}.$$

Postoji i brži način određivanja limesa u beskonačnosti. Tri su moguća slučaja:

1. Ako je stupanj polinoma u brojniku jednak stupnju polinoma u nazivniku, limes je realan broj i jednak je omjeru koeficijenata uz vodeće članove polinoma u brojniku odnosno nazivniku. Na primjer

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^4+6x^3-3x^2+1}{7x^4+x^2-10} = \frac{5}{7}.$$

2. Ako je stupanj polinoma u brojniku veći od stupnja polinoma u nazivniku, limes je jednak $+\infty$ ili $-\infty$. Potrebno je analizirati predznak polinoma u brojniku i nazivniku pri čemu gledamo vodeće potencije i koeficijente uz njih.

   Na primjer

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3+6x-1}{4x^2+16} = \left(\frac{-}{+}\right) = -\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4-x^3}{-3x^2+6x-12} = \left(\frac{+}{-}\right) = -\infty.$$

3. Ako je stupanj polinoma u brojniku manji od stupnja polinoma u nazivniku, limes je jednak 0.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4+3x^2+7x+9}{2x^7+3x^2+5}=0.$$

Zadatak 3.83. *Odredite limese*

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3+x^4}{2+x^5}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x^6+6x^5}{7x^3-4x^6}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3x^2+9x}{x+6}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+3}-x}{5x+7}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x+6x^2}{2-\sqrt{1+x^2+x^4}}$.

Rješenje.

a)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3+x^4 \quad /:x^5}{2+x^5 \quad /:x^5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{3}{x^5}+\frac{1}{x^4}}{\frac{2}{x^5}+1}=\frac{0+0}{0+1}=0.$$

ili kraće:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{3+x^4}{2+x^5} &= (\text{stupanj polinoma u brojniku} < \text{stupanj polinoma u nazivniku, } 4<5)\\ &= 0.\end{aligned}$$

b)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^6+6x^5 \quad /:x^6}{7x^3-4x^6 \quad /:x^6}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5+\frac{6}{x}}{\frac{7}{x^3}-4}=\frac{5+0}{0-4}=-\frac{5}{4}.$$

ili kraće:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^6+6x^5}{7x^3-4x^6} &= (\text{stupanj polinoma u brojniku} = \text{stupanj polinoma u nazivniku})\\ &= -\frac{5}{4}.\end{aligned}$$

c)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^2+9x \quad /:x^2}{x+6 \quad /:x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3+\frac{9}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{6}{x^2}} = \frac{-3+0}{0+0} = \frac{-3}{0^+} = -\infty.$$

ili kraće:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^2+9x}{x+6} &= (\text{stupanj polinoma u brojniku} > \text{stupanj polinoma u nazivniku}) \\ &= -\infty.\end{aligned}$$

d)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+3}-x \quad /:x}{5x+7 \quad /:x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3}{x^2}}-1}{5+\frac{7}{x}} = \frac{\sqrt{1+0}-1}{5+0} = \frac{0}{5} = 0.$$

e)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{5x+6x^2 \quad /:x^2}{2-\sqrt{1+x^2+x^4} \quad /:x^2} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{5}{x}+6}{\frac{2}{x^2}-\sqrt{\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^2}+1}} = \frac{0+6}{0-\sqrt{0+0+1}} \\ &= \frac{6}{-1} = -6.\end{aligned}$$

Zadatak 3.84. *Odredite limese*

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5x^3+6x-2}{2x^3+3}$ $\qquad (Rj. : \frac{5}{2})$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4x^2+1}{1-x}$ $\qquad (Rj. : -\infty)$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{6x^4+5x-3}{5x^5+7x^2+2}$ $\qquad (Rj. : 0)$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^2-6x+5}{3+3x^2}$ $\qquad (Rj. : \frac{2}{3})$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{7x^3+9x}{4-2x^3}$ $\qquad (Rj. : -\frac{7}{2})$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x-1}$ $\qquad (Rj. : -\infty).$

Nadalje, neke važnije limese funkcija:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

  $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

- za $a > 1 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} a^x = \infty$

  za $0 < a < 1 >\Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$

Zadatak 3.85. *Zadana je funkcija inflacije $i(t) = 2.4e^{-0.04t} + 1.6$, gdje je t vrijeme, a i inflacija. Odredite pibližne vrijednosti inflacije za $t \to +\infty$.*

Rješenje.

$\lim\limits_{t\to+\infty} i(t) = \lim\limits_{t\to+\infty}(2.4e^{-0.04t} + 1.6) = 1.6.$

Zadatak 3.86. *Ovisnost cijene p o vremenu t dana je funkcijom $p(t) = 2.7\left(\frac{1}{2}\right)^{0.02t} + 4.2$.Ispitajte dugoročno ponašanje cijene.*

Rješenje.

$\lim\limits_{t\to+\infty} p(t) = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(2.7\left(\frac{1}{2}\right)^{0.02t} + 4.2\right) = 4.2.$

Zadatak 3.87. *Zadana je funkcija ukupnog broja prodanih proizvoda (u tisućama komada) u ovisnosti o sredstvima uloženim u reklamu x.*

a) *Izračunajte* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{100x^2-400x}{2x^2-8}$ *i interpretirajte dobiveni rezultat.*

b) *Izračunajte* $\lim\limits_{x\to 2}\frac{100x^2-400x}{2x^2-8}$.

Rješenje. a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{100x^2-400x}{2x^2-8} = 50$, *interpretacija: Ukoliko poduzeće neograničeno ulaže u reklamiranje proizvoda, vrijednost prodaje neće premašiti* 50 *komada (za izrazito velika sredstva uložena u reklamiranje, broj prodanih proizvoda biti će približno jednak* 50. *b)*$\lim\limits_{x\to 2}\frac{100x^2-400x}{2x^2-8} = \frac{50}{3}$.

Zadatak 3.88. *Zadana je funkcija potražnje u ovisnosti o cijeni $Q(p) = \frac{2}{p}$. Što se događa s potražnjom za niske razine cijena? Što se događa s potražnjom za visoke razine cijena?*

Rješenje.

Niske cijene:$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{p} = +\infty$.

Visoke cijene: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{p} = 0$.

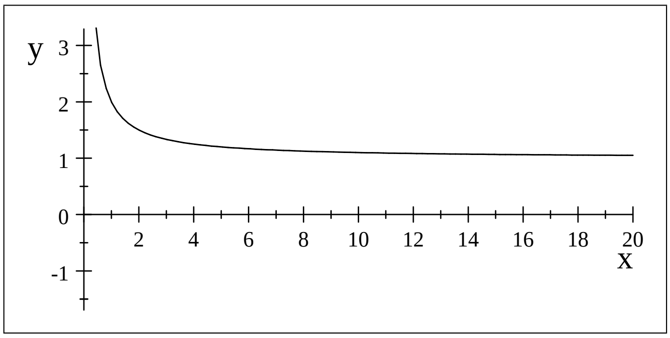
3.7 Asimptote funkcije

Asimptota funkcije je pravac kojem se graf funkcije pibližava (uz koji se priljubljuje) kada nezavna varijabla teži u $\pm\infty$ ili neki realni broj koji nije u domeni funkcije (nalazi se u rubnim dijelovima domene), ali ga nikada ne dotakne. Asimptote su pravci za koje vrijedi da se graf funkcije čije su one asimptote ponaša približno jednako kao i asimptota, stoga je ponekad znatno lakše analizirati asimptotu (koja je pravac-linearna funkcija) nego same, komliciranije, funkcije.

3.7.1 Horizontalna asimptota

Pravac $y = y_0$ je horizontalna asimptota funkcije f u lijevoj strani ako je $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = y_0$ za $y_0 \in \mathbb{R}$.

Pravac $y = y_0$ je horizontalna asimptota funkcije f u desnoj strani ako je $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = y_0$,za $y_0 \in \mathbb{R}$.



Funkcija sa horizontalnom asimptotom $y = 1$

Zadatak 3.89. *Odredite horizontalne asimptote u obje strane funkcije* $f(x) = \frac{5x^2+4x}{3x^2+1}$.

Rješenje.

Nađimo horizontalnu asimptotu funkcije f u lijevoj strani, računamo

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^2+4x \quad / : x^2}{3x^2+1 \quad / : x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{5+\frac{4}{x}}{3+\frac{1}{x^2}} = \frac{5}{3}.$$

Nađimo sada horizontalnu asimptotu funkcije f u desnoj strani.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^2+4x \quad / : x^2}{3x^2+1 \quad / : x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5+\frac{4}{x}}{3+\frac{1}{x^2}} = \frac{5}{3}.$$

Dobivamo da je $y = \frac{5}{3}$ horizontalna asimptota funkcije f i u lijevoj i u desnoj strani.

Zadatak 3.90. *Odredite horizontalne asimptote u obje strane funkcije $f(x) = \frac{2x+1}{x^2}$.*

Rješenje.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1 \quad /:x^2}{x^2 \quad /:x^2} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1} = \frac{0}{1} = 0. \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1 \quad /:x^2}{x^2 \quad /:x^2} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1} = \frac{0}{1} = 0. \end{aligned}$$

Dobivamo da je $y = 0$ horizontalna asimptota funkcije f u obe strane.

Zadatak 3.91. *Odredite horizontalne asimptote u obje strane funkcije $f(x) = \frac{6x^3+5x-7}{3x^2+4x-3}$.*

Rješenje.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{6x^3+5x-7 \quad /:x^3}{3x^2+4x-3 \quad /:x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{6+\frac{5}{x^2}-\frac{7}{x^3}}{\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{3}{x^3}} = \frac{6}{0^-} = -\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{6x^3+5x-7 \quad /:x^3}{3x^2+4x-3 \quad /:x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6+\frac{5}{x^2}-\frac{7}{x^3}}{\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{3}{x^3}} = \frac{6}{0^+} = +\infty.$$

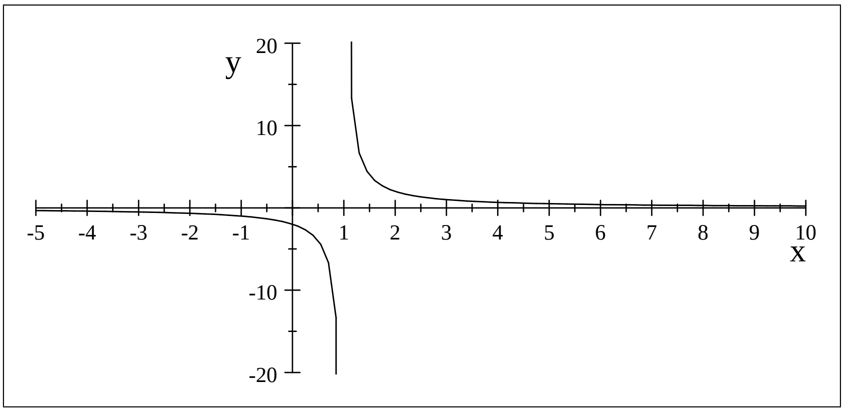
Funkcija $f(x) = \frac{6x^3+5x-7}{3x^2+4x-3}$ nema horizontalnu asimptotu.

3.7.2 Vertikalna asimptota

Funkcija f ima vertikalnu asimptotu $x = x_0$ s lijeve strane ukoliko vrijedi $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$ ili $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$.

Funkcija f ima vertikalnu asimptotu $x = x_0$ s desne strane ukoliko vrijedi $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$ ili $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$.

Vertikalne asimptote se mogu nalaziti u točkama prekida funkcije ili u otvorenim rubovima domene.



Funkcija koja ima vertikalnu asimptotu $x = 1$

Zadatak 3.92. *Odredite vertikalne asimptote funkcije* $f(x) = \frac{x+7}{x-3}$.

Rješenje. Vertikalnu asimptotu tražimo u točkama prekida, a to je točka 3 *(nije u domeni jer je to nultočka nazivnika).*

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x+7}{x-3} = \frac{10}{0^-} = -\infty.$$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{x+7}{x-3} = \frac{10}{0^+} = +\infty.$$

Dobivamo da je $x = 3$ *vertikalna asimptota s lijeve i s desne strane.*

Zadatak 3.93. *Odredite vertikalne asimptote funkcije* $f(x) = \frac{x^2+2x}{x}$.

Rješenje. Vertikalnu asimptotu računamo u $x = 0$. *Računamo limese.*

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+2x}{x} = (\frac{0}{0}) = \lim_{x\to 0^-}(x+1) = 1.$$

Analogno dobivamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+2x}{x} = 1.$$

Funkcija f *nema vertikalnu asimptotu.*

3.7.3 Kosa asimptota

Ako postoji i konačan je limes

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = k \in \mathbb{R},$$

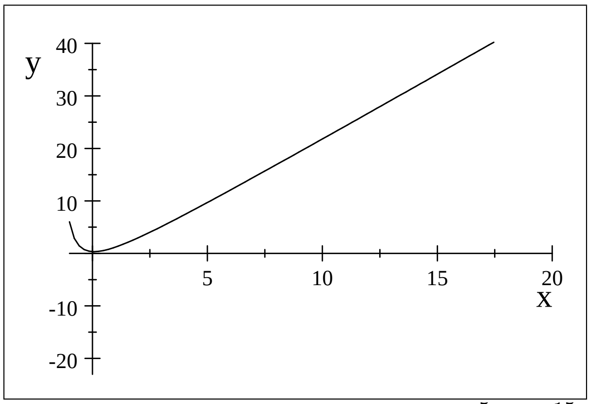
te postoji i konačan je limes

$$\lim_{x\to -\infty} (f(x) - kx) = l \in \mathbb{R}.$$

tada za pravac $y = kx+l$ kažemo da je lijeva vertikalna asimptota funkcije f.

Analogno za pravac $y = kx + l$ kažemo da je desna vertikalna asimptota funkcije f, gdje su

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \in \mathbb{R} \qquad i \qquad \lim_{x\to +\infty} (f(x) - kx) = l \in \mathbb{R}.$$



Funkcija ima kosu asimptotu $y = \frac{5}{2}x - \frac{15}{4}$

Važno je primjetiti da ako postoji horizontalna asimptota s lijeve strane tada je ona jednaka kosoj asimptoti s lijeva, tj. jednadžba kose asimptote je tada $y = l$.

Isto tako ako postoji horizontalna asimptota s desne strane, tada je ona jednaka kosoj asimptoti s desna, tj. jednadžba kose asimptote s desna je tada $y = l$.

Dakle, ukoliko postoji horizontalna asimptota, kosu nije potrebno računati nego samo naznačiti da je jednaka horizontalnoj.

Zadatak 3.94. *Odredite kose asimptote (ako postoje) funkcije* $f(x) = \frac{3x^3+5x+7}{x^2+4x}$.
Rješenje.
Jednadžba kose asimptote s desna (ako postoji) je $y = kx + l$.

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{3x^3+5x+7}{x^2+4x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^3+5x+7}{x^3+4x^2} = 3.$$

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to-\infty}(\frac{3x^3+5x+7}{x^2+4x} - 3x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^3+5x+7-3x^3-12x^2}{x^2+4x} = \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{-12x^2+5x+7}{x^2+4} = -\frac{12}{1} = -12. \end{aligned}$$

Jednadžba kose asimptote s desna je $y = 3x - 12$.
Jednadžba kose asimptote s lijeva je $y = kx + l$.

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3x^3+5x+7}{x^2+4x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3+5x+7}{x^3+4x^2} = 3.$$

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to+\infty}(\frac{3x^3+5x+7}{x^2+4x} - 3x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3+5x+7-3x^3-12x^2}{x^2+4x} = \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{-12x^2+5x+7}{x^2+4} = -\frac{12}{1} = -12. \end{aligned}$$

Zadatak 3.95. *Odredite kose asimptote (ako postoje) funkcije* $f(x) = \frac{5x^2+1}{2x+3}$.

Rješenje.
Jednadžba kose asimptote $y = kx + l$.

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{5x^2+1}{2x+3}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{5x^2+1}{2x^2+3x} = \frac{5}{2}.$$

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to-\infty}(\frac{5x^2+1}{2x+3} - \frac{5}{2}x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2(5x^2+1)-5x(2x+3)}{2(2x+3)} = \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{10x^2+2-10x^2-15x}{4x+6} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2-15x}{4x+6} = \frac{-15}{4}. \end{aligned}$$

$y = \frac{5}{2}x - \frac{15}{4}$.
Analogno dobijemo da je $y = \frac{5}{2}x - \frac{15}{4}$ *kosa asimptota s desne strane.*

3.7.4 Zadaci za vježbu (gradivo asimptota i limesa)

Zadatak 3.96. *Odredite sve asimptote funkcije* $f(x) = \frac{7-x}{2x+3}$.

Rješenje.
Odredimo prvo horizontalnu asimptotu (s lijeva i s desna).

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{7-x}{2x+3} = -\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{7-x}{2x+3} = -\frac{1}{2}.$$

$y = -\frac{1}{2}$ *je horizontalna asimptota slijeva i zdesna.*
Sada odredimo vertikalnu asimptotu. Tražimo ju u nultočki nazivnika $\frac{-3}{2}$.

$$\lim_{x\to-\frac{3}{2}^-} \frac{7-x}{2x+3} = \frac{+}{0^-} = -\infty.$$

$$\lim_{x\to-\frac{3}{2}^+} \frac{7-x}{2x+3} = \frac{+}{0^+} = +\infty.$$

Kako postoji horizontalna asimptota slijeva i zdesna, kosu nije potrebno zračunati jer je ona jednaka horizontalnoj, tj.
$y = -\frac{1}{2}$ *je horizontalna asimptota s lijeva i s desna.*

Zadatak 3.97. *Odredite sve asimptote funkcije* $f(x) = \frac{2x^2+6x+3}{1-5x}$.
Rješenje.
Horizontalne asimptote nema jer je $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2+6x+3}{1-5x} = \infty$ *jer je stupanj polinoma u brojniku veći od stupnja polinoma u nazivniku.*
Dalje, tražimo vertikalne asimptote i to u nultočki nazivnika, tj. u $\frac{1}{5}$.

$$\lim_{x\to\frac{1}{5}^-} \frac{2x^2+6x+3}{1-5x} = \frac{\frac{2}{25}+\frac{6}{5}+3}{0^+} = +\infty.$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{5}^+} \frac{2x^2+6x+3}{1-5x} = \frac{\frac{2}{25}+\frac{6}{5}+3}{0^-} = -\infty.$$

Dobivamo: $x = \frac{1}{5}$ *je vertikalna asimptota funkcije* f.
Kosa asimptota $y = kx + l$*:*

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{2x^2+6x+3}{1-5x}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+6x+3}{x-5x^2} = -\frac{2}{5}.$$

$$
\begin{aligned}
l &= \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^2+6x+3}{1-5x}+\frac{2}{5}x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{10x^2+30x+15+2x-10x^2}{5(1-5x)} = \\
&= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{32x+15}{5-25x} = -\frac{32}{25}.
\end{aligned}
$$

Kosa asimptota slijeva i zdesna je pravac $y=-\frac{2}{5}x-\frac{32}{25}$.

Zadatak 3.98. *Odredite sve asimptote funkcije* $f(x)=\frac{2x^2-5}{9-x^2}$.

Rješenje.

Horizontalna asimptota:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-5}{9-x^2}=\frac{2}{-1}=-2.$$

$y=-2$ *je horizontalna asimptota s lijeve i s desne strane.*

Vertikalna asimptota:

Tražimo ju u nultočkama nazivnika $9-x^2=0 \Longrightarrow x=\pm 3$.

$$\lim_{x\to -3^-}\frac{2x^2-5}{9-x^2}=\frac{13}{0^-}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to -3^+}\frac{2x^2-5}{9-x^2}=\frac{13}{0^+}=+\infty.$$

$y=-3$ *je vertikalna asimptota s lijeve i s desne strane.*

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{2x^2-5}{9-x^2}=\frac{13}{0^-}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{2x^2-5}{9-x^2}=\frac{13}{0^+}=+\infty.$$

$y=3$ *je vertikalna asimptota s lijeve i s desne strane.*

Kosa asimptota je jednaka horizontalnoj.

Zadatak 3.99. *Odredite sve asimptote funkcije* $f(x)=\frac{2x^3+3}{x+1}$.

Rješenje.

Vidimo da horizontalne asimptote nema jer je

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^3+3}{x+1}=+\infty.$$

Vertikalna:
Vertikalnu tražimo u točki -1.

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{2x^3+3}{x+1}=\frac{-2+3}{0^-}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{2x^3+3}{x+1}=\frac{-2+3}{0^+}=+\infty.$$

Kosa asimptota $y=kx+l$

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{2x^3+3}{x+1}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^3+3}{x^2+x}=\pm\infty$$

Funkcija nema kosu asimptotu.

Zadatak 3.100. *Odredite sve asimptote funkcije* $f(x)=\frac{3x^3+5}{x^2+2}$.

Rješenje.

Horizontalne asimptote nema jer je stupanj polinoma u brojniku veći od stupnja polinoma u nazivniku pa je

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+5}{x^2+2}=\infty.$$

Ni vertikalne asimptote nema jer ova funkcija nema prekida i domena joj je cijeli $\mathbb{R}$. *(mi se orijentiramo na nultočke nazivnika, a polinom u nazivniku* x^2+2 *nema nultočaka).*

Kosa asimptota $y=kx+l$*:*

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{3x^3+5}{x^2+2}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^3+5}{x^3+2x}=3,$$

$$l=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3x^3+5}{x^2+2}-3x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^3+5-3x^3-6x}{x^2+2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5-6x}{x^2+2}=0.$$

$y=3x$ *je kosa asimptota s lijeve i s desne strane.*

Zadatak 3.101. *Odredite asimptote funkcija*

a) $f(x)=\frac{3x+2}{x+6}$

(Rj. $:$ *H.A.* $: y=3;$ *V.A* $: x=-6;$ *K.A* $: y=3.$*)*

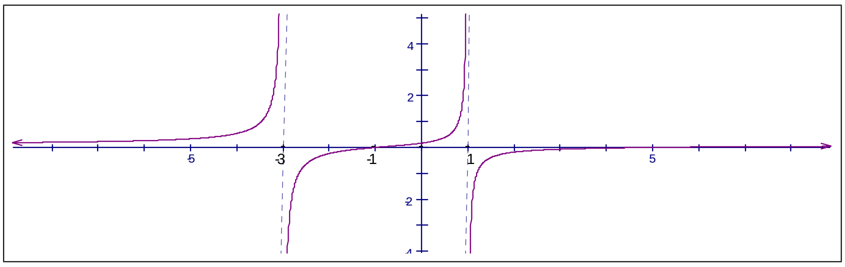
b) $f(x)=\frac{4x^2+4x-1}{x+1}$

(Rj. $:$ *H.A.* $:$ *nema;* *V.A.* $: x=-1,$ *K.A* $: y=4x.$*)*

c) $f(x) = \frac{5x+1}{x^2-1}$

(Rj. : $H.A : y = 0, V.A : x = -1, x = 1, K.A$: nema.)

Zadatak 3.102. *Zadan je graf funkcije*



a) Odredite limese:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-3^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-3^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$, . $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1+} f(x)$.

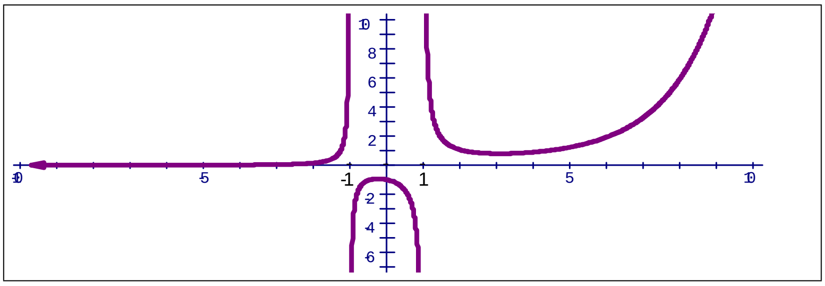
b) Odredite sve asimptote funkcije.

Rješenje:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to-3^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-3^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to1+} f(x) = -\infty$.

b) $y = 0$ *je horizontalna asimptota,* $x = -3, x = 1$ *vertikalne asimptote.*

Zadatak 3.103. *Zadan je graf funkcije*



a) Odredite limese:

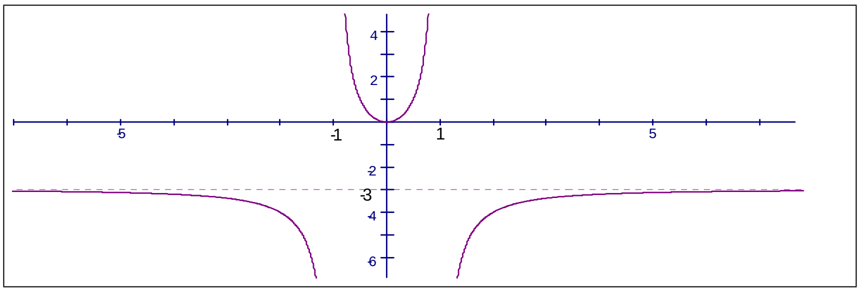
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$.

b) Odredite sve asimptote funkcije.

Rješenje: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-0^+} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x\to-0^+} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$.

b) horzontalna asimptota s lijeve strane $y = 0$, *vertikalne asimptote:* $x = -1, x = 1$.

Zadatak 3.104. *Zadan je graf funkcije*



a) Odredite limese:
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$.

b) Odredite sve asimptote funkcije.

Rješenje.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -3$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -3$, $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) + \infty$, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = -\infty$.

b) $y = -3$ *je horizontalna asimptota,* $x = -1, x = 1$ *su vertikalne asimptote.*

3.8 Derivacija funkcije

Prethodno uvođenju pojma derivacije funkcije, potrebno je definirati neprekidnost funkcije. Realna funkcija je neprekidna ili kontinuirana u točki a, ako i samo ako je njena granična vrijednost kada x teži u a $(x \to a)$ jednaka vrijednosti funkcije za $x = a$,tj., $\lim\limits_{x\to-a} f(x) = f(a)$.

Derivacija je osnovni pojam diferencijalnog računa. Diferencijalni račun jedno je od najvažnijih područja matematike sa širokom primjenom. Prethodno uvođenju pojma derivacije definirat ćemo prirast funkcije.

Neka je zadana funkcija $y = f(x)$ $(f : I \to \mathbb{R})$ na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ i neka je $x_0 \in I$ neka točka tog intervala te neka je točka $x \in I$, $x \neq x_0$.

Prirast ili diferencija argumenta x definira se izrazom

$$\Delta x = x - x_0$$

Promjena ili prirast funkcije u točki x definira se s

$$\Delta y = f(x) - f(x_0).$$

,

Kvocijent diferencija jednak je

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

nam pokazuje kolika je "brzina" promjene funkcije f od x_0 do x. Drugim riječima, mjeri srednju brzinu promjenu funkcije od x_0 do x.što je prirast manji, to nam kvocijent diferencija daje točniju informaciju o brzini promjene funkcije u točki x_0.

Ako pustimo da x teži ka x_0, tj. $\Delta x \to 0$ tada vrijednost

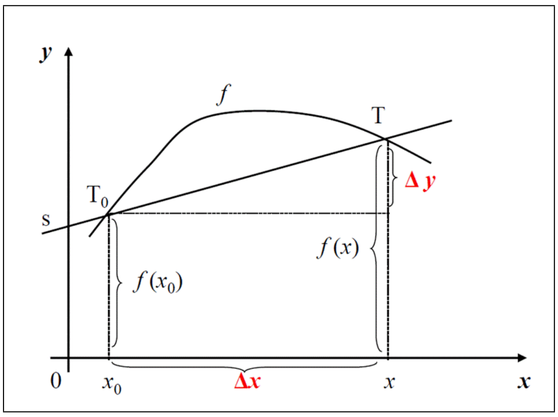
$$\lim_{x \to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

mjeri "brzinu" promjene funkcije f u točki x_0. Ukoliko taj limes postoji, nazivamo ga **derivacijom funkcije** $y = f(x)$ po argumentu x i označavamo sa $f'(x)$ ili $\frac{dy}{dx}$.

Dakle,

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Da bi funkcija u nekoj točki imala derivaciju, nužan uvjet je da je neprekidna, ali to nije i dovoljan uvjet. Naime, funkcija koja je neprekidna u nekoj točki ne mora imati derivaciju u toj točki.



Derivacija funkcije

Slijedi geometrijska interpretacija derivacije.Da bi se razumjelo geometrijsko značenje derivacije, potrebno je promotriti gornju sliku (Derivacija funkcije) i pratiti tekst koji slijedi. Neka je α_t kut što ga tangenta na graf funkcije $y = f(x)$ u točki T_0 zatvara s pozitivnim dijelom $x-$osi, a α_s kut kojeg zatvara sekanta (pravac kroz točke T i T_0) sa pozitivnim dijelom x-osi. S gornje slike možemo vidjeti kako je

$$tg\alpha_s = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Kada $\Delta x \to 0$ tada $T \to T_0$, odnosno $\alpha_s \to \alpha_t$ pa vrijedi

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\alpha_s \to \alpha_t} tg\alpha_s = tg\alpha_t$$

Dervacija funkcije u točki x_0 jednaka je koeficijentu smjera tangente t povučene na graf funkcije u točki T_0.

Stoga je jednadžba tangente u točki (x_0, y_0) funkcije $f(x)$ (gdje je $y_0 = f(x_0)$) dana s

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Primjer 3.20. *Zadana je funkcija ukupnih troškova u ovisnosti o količini proizvodnje $C(Q) = Q^2 + 2$.*

Odredimo $C(1)$ i $C(1.01) \Longrightarrow C(1) = 3$ i $C(1.01) = 3.0201$.

Označimo:

ΔQ promjena količine proizvodnje

ΔC- promjena ukupnih troškova

U ovom primjeru je $\Delta Q = 1.01 - 1 = 0.01$ i $\Delta C = 3.0201 - 3 = 0.0201$.

Nas zanima promjena ukupnih troškova po jedinici promjene $\frac{\Delta C}{\Delta Q}$. Imamo $\frac{\Delta C}{\Delta Q} = \frac{0.0201}{0.01} = 2$

Općenito, zanima nas promjena ukupnih troškova po MALOJ jedinici promjene proizvodnje, tj. $\lim\limits_{\Delta Q \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta Q}$.

Izračunajmo $\lim\limits_{\Delta Q \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta Q}$.

$C(Q) = Q^2 + 2 \Longrightarrow \Delta C = C(Q + \Delta Q) = (Q + \Delta Q)^2 + 2 - Q^2 - 2 = Q^2 + 2Q\Delta Q + (\Delta Q)^2 - Q^2 = \Delta Q(2Q + \Delta Q)$

Pa je $\lim\limits_{\Delta Q \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta Q} = \lim\limits_{\Delta Q \to 0} \frac{\Delta Q(2Q+\Delta Q)}{\Delta Q} = 2Q$.

Na razini proizvodnje $Q = 1$ imamo $\lim\limits_{\Delta Q \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta Q} = 2Q = 1$.

Derivacije funkcija nećemo računati pomoću limesa funkcije, već ćemo koristiti derivacije elementarnih funkcija koje su zadane tablično.

.TABLICA DERIVACIJA OSNOVNIH FUNKCIJA

1. $y = c, \quad c = konst$	$\Longrightarrow$	$y' = 0$
2. $y = x^n, n \in \mathbb{R}$	$\Longrightarrow$	$y' = nx^{n-1}$
3. $y = x$	$\Longrightarrow$	$y' = 1$
4. $y = a^x$	$\Longrightarrow$	$y' = a^x \ln a$
5. $y = e^x$	$\Longrightarrow$	$y' = e^x$
6. $y = \log_a x$	$\Longrightarrow$	$\mathbf{y}' = \frac{1}{x}\frac{1}{\ln a}$
7. $y = \ln x$	$\Longrightarrow$	$y' = \frac{1}{x}$
8. $y = \sin x$	$\Longrightarrow$	$y' = \cos x$
9. $y = \cos x$	$\Longrightarrow$	$y' = -\sin x$
10. $y = tgx$	$\Longrightarrow$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
11. $y = ctgx$	$\Longrightarrow$	$y' = \frac{-1}{\sin^2 x}$
12. $y = \arcsin x$	$\Longrightarrow$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $y = \arccos x$	$\Longrightarrow$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $y = arcctgx$	$\Longrightarrow$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
15. $y = arcctgx$	$\Longrightarrow$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$
16. $y = \sqrt{x}$	$\Longrightarrow$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Također pri računanju derivacija složenih funkcija, koristit ćemo sljedeća pravila:

PRAVILA DERIVIRANJA

1. $y = f(x) + g(x) \quad \Longrightarrow \quad y' = f'(x) + g'(x)$
2. $y = c \cdot f(x) \quad \Longrightarrow \quad y' = c \cdot f'(x)$
3. $y = f(x)g(x) \quad \Longrightarrow \quad y' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$
4. $y = \dfrac{f(x)}{g(x)} \quad \Longrightarrow \quad y' = \dfrac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$
5. $y = (g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \Longrightarrow \quad y' = g'(f(x))f'(x)$

Primjer 3.21. *Deriviranje funkcija*

a) $(357)' = 0$

b) $(x)' = 1$

c) $(x^2)' = 2x^{2-1} = 2x$

d) $(x^{123}) = 123x^{123-1} = 123x^{122}$

e) $(x^{-1}) = (-1)x^{-1-1} = -x^{-2}$

f) $(x^{-100}) = -100x^{-100-1} = -100x^{-101}$

g) $(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

h) $(\sqrt[3]{x^4})' = (x^{\frac{4}{3}})' = \frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1} = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$

i) $(4^x)' = 4^x \cdot \ln 4$

j) $(\log_3 x)' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln 3}$

k) $(\log x)' = \frac{1}{x}\frac{1}{\ln 10}$

l) $(\frac{1}{x})' = (x^{-1})' = -x^{-2}$

m) $(\frac{1}{x^5}) = (x^{-5})' = -5x^{-5-1} = -5x^{-6}$.

Zadatak 3.105. *Odredite derivacije sljedećih funkcija:*

a) $f(x) = 6x + 11$

b) $f(x) = 5x^2 + 4x - \frac{1}{2}$

c) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5$

d) $f(x) = \frac{5}{x^2} + 5x^4 + 100$

e) $f(x) = \frac{5x^5+x^4+x+7}{x}$

f) $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt[3]{x^2} + \frac{4}{\sqrt{x}}$

g) $f(x) = 5\sin x + 4\cos x$.

Rješenje.

a)

$$f'(x) = (6x + 11)' = (6x)' + (11)' = 6(x)' + 0 = 6.$$

b)

$$\begin{aligned} f'(x) &= (5x^2 + 4x - \frac{1}{2})' = (5x^2)' + (4x)' + (-\frac{1}{2})' = \\ &= 5(x^2)' + 4(x)' + 0 = 5 \cdot 2x^{2-1} + 4 = 10x + 4. \end{aligned}$$

c)

$$f'(x) = (\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5)' = (\frac{1}{4}x^4)' + (\frac{1}{5}x^5)' = \frac{1}{4}\cdot 4x^{4-1} + \frac{1}{5}x^{5-1} = x^3 + x^4.$$

d)

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\frac{5}{x^2} + 5x^4 + 100)' = 5(x^{-2})' + 5(x^4) + (100)' = \\ &= 5\cdot(-2)x^{-2-1} + 5\cdot 4x^{4-1} + 0 = -10x^{-3} + 20x^3. \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{5x^5 + x^4 + x + 7}{x}\right)' = \left(\frac{5x^5}{x} + \frac{x^4}{x} + \frac{x}{x} + \frac{7}{x}\right)' = \\ &= \left(\frac{5x^5}{x}\right)' + \left(\frac{x^4}{x}\right)' + \left(\frac{x}{x}\right)' + \left(\frac{7}{x}\right)' = \\ &= (5x^4)' + (x^3)' + (1)' + (7x^{-1})' = 5\cdot 4x^{4-1} + 3x^{3-1} + 0 + 7(-1)x^{-1-1} = \\ &= 20x^3 + 3x^2 - 7x^{-2}. \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^2} + \frac{4}{\sqrt{x}}\right)' = \left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^2}\right)' + \left(\frac{4}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{1}{2}(x^{\frac{2}{3}})' + 4(x^{-\frac{1}{2}})' = \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} + 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}} - 2x^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

g)

$$f'(x) = (5\sin x + 4\cos x)' = 5(\sin x)' + 4(\cos x)' = 5\cos x - 4\sin x.$$

3.8.1 Derivacija umnoška

Neka su zadane derivabilne funkcije $f(x)$ i $g(x)$ derivaciju umnoška funkcija $f(x)\cdot g(x)$ računamo na sljedeći način:

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + g'(x)\cdot f(x).$$

Zadatak 3.106. *Derivirajte funkcije*

a) $g(x) = (3x+4)(x^3+x-1)$

b) $g(x) = (\frac{1}{2}x^2+6x-3)(2\sin x+8x)$

c) $g(x) = x^2 tgx$

d) $g(x) = x^2 \ln x$

e) $g(x) = (x^4+3x^2+1)e^x$

f) $g(x) = x\sin x + x\cos x$

g) $g(x) = x^5\cos x + x^3 ctgx$

Rješenje.
Koristimo formulu za derivaciju umnoška:

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + g'(x)\cdot f(x).$$

a)

$$\begin{aligned} g'(x) &= (3x+4)'(x^3+x-1)+(x^3+x-1)'(3x+4) = \\ &= 3(x^3+x-1)+(3x^2+1)(3x+4) = \\ &= 12x^3+12x^2+6x+1. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} g'(x) &= (\frac{1}{2}x^2+6x-3)'(2\sin x+8x)+(2\sin x+8x)'(\frac{1}{2}x^2+6x-3) = \\ &= (x+6)(2\sin x+8x)+(2\cos x+8)(\frac{1}{2}x^2+6x-3). \end{aligned}$$

c)

$$g'(x) = (x^2)'tgx + (tgx)'x^2 = 2x\cdot tgx + \frac{1}{\cos^2 x}x^2.$$

d)

$$g'(x) = (x^2)'\ln x + (\ln x)'x^2 = 2x\ln x + \frac{1}{x}x^2 = 2x\ln x + x.$$

e)

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x^4+3x^2+1)'e^x + (x^4+3x^2+1)(e^x)' = \\ &= (4x^3+6x)e^x + (x^4+3x^2+1)e^x = \\ &= (x^4+4x^3+3x^2+6x+1)e^x. \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned} g'(x) &= x'\sin x + x(\sin x)' + x'\cos x + x(\cos x)' = \\ &= \sin x + x\cos x + \cos x - x\sin x. \end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x^5)'\cos x + x^5(\cos x)' + (x^3)'\operatorname{ctg} x + x^3(\operatorname{ctg} x)' = \\ &= 5x^4\cos x - x^5\sin x + 3x^2\operatorname{ctg} x - x^3\frac{1}{\sin^2 x}. \end{aligned}$$

3.8.2 Derivacija kvocijenta

Neka su zadane derivabilne funkcije $f(x)$ i $g(x)$ derivaciju kvocijenta funkcija $\frac{f(x)}{g(x)}$ računamo na sljedeći način:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}.$$

Zadatak 3.107. *Odredite derivacije slijedećih funkcija*

a) $f(x) = \frac{x+1}{4-x}$

b) $f(x) = \frac{x^2+6x+1}{x+1}$

c) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

d) $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$

e) $f(x) = \frac{e^x+5x}{4x-2}$.

Rješenje.
U ovom zadatku koristimo formulu za derivaciju kvocijenta dviju funkcija:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}.$$

a)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x+1}{4-x}\right)' = \frac{(x+1)'(4-x)-(4-x)'(x+1)}{(4-x)^2} = \frac{4-x-(x+1)(-1)}{(4-x)^2} = \\ &= \frac{4-x+x+1}{(4-x)^2} = \frac{5}{(4-x)^2}. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^2+6x+1}{x+1}\right)' = \frac{(x^2+6x+1)'(x+1)-(x^2+6x+1)(x+1)'}{(x+1)^2} = \\ &= \frac{(2x+6)(x+1)-(x^2+6x+1)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+8x+6-x^2-6x-1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2+2x+5}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

c)

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{(\ln x)'x - \ln x(x)'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x\cdot(1)}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

d)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\sin x-\cos x)'(\sin x+\cos x)-(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)'}{(\sin x+\cos x)^2} = \\ &= \frac{(\cos x+\sin x)(\sin x+\cos x)-(\sin x-\cos x)(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)^2} = \\ &= \frac{(\cos x+\sin x)^2+(\cos x-\sin x)^2}{(\cos x+\sin x)^2}. \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\frac{e^x+5x}{4x-2})' = \frac{(e^x+5)(4x-2)-4(e^x+5x)}{(4x-2)^2} = \\ &= \frac{4xe^x-6e^x-10}{(4x-2)^2}. \end{aligned}$$

3.8.3 Derivacija složene funkcije (derivacija kompozicije funkcija)

Ako je funkcija nastala kompozicijom više funkcija, tj. $h(x) = f(g(x))$ tada njenu derivaciju dobivamo na sljedeći način:

$$h'(x) = (f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x).$$

Derivacija složene funkcije se još zapisuje i na sljedeći način:

$$\begin{aligned} f(g(x))' &= f'(u) \cdot g'(x) \\ u &= g(x), \end{aligned}$$

što nazivamo i pravilom o ulančanom deriviranju.

Primjer 3.22. *Derivirajmo funkciju* $f(x) = (x+1)^3$.
Ovdje je $f(x) = u^3$, $g(x) = x + 1$.
Deriviramo po pravilu o ulančanom deriviranju:
$((x+1)^3)' = f'(u)g'(x) = (u^3)'(x+1)' = 3u^2 \cdot 1 = 3(x+1)^2$

Derivirati smo mogli i direktno (bez raspisa $f(x) = u^3$, $g(x) = x + 1$ *).*
$((x+1)^3)' = 3(x+1)^2(x+1)' = 3(x+1)^2 \cdot 1 = 3(x+1)^2$.

Zadatak 3.108. *Derivirajte funkcije*

a) $f(x) = (2x+4)^5$

b) $f(x) = (3x^2 - 2x - 1)^3$

c) $f(x) = \sqrt{5x+2}$

d) $f(x) = \sqrt[5]{(4x-3)^2}$

e) $f(x) = 8^{7x-3}$.

Rješenje.

a)

$$f'(x) = ((2x+4)^5)' = 5(2x+4)^4(2x+4)' = 5(2x+4)^4 \cdot 2 = 10(3x+4)^4.$$

b)

$$\begin{aligned} f'(x) &= ((3x^2-2x-1)^3)' = 3(3x^2-2x-1)^2(3x^2-2x-1)' = \\ &= 3(3x^2-2x-1)^2(6x-2). \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sqrt{5x+2})' = ((5x+2)^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}(5x+2)^{\frac{1}{2}-1}(5x+2)' = \\ &= \frac{1}{2}(5x+2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 5 = \frac{5}{2}(5x+2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{5}{2\sqrt[2]{5x+2}}. \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sqrt[5]{(4x-3)^2})' = ((4x-3)^{\frac{2}{5}})' = \frac{2}{5}(4x-3)^{\frac{2}{5}-1}(4x-3)' = \\ &= \frac{2}{5}(4x-3)^{-\frac{3}{5}}\cdot 4 = \frac{8}{5}(4x-3)^{-\frac{3}{5}} = \frac{8}{5\sqrt[5]{(4x-3)^3}}. \end{aligned}$$

e)

$$f(x) = (8^{7x-3})' = 8^{7x-3}\cdot\ln 8\cdot(7x-3)' = 8^{7x-3}\cdot\ln 8\cdot 7 = 7\ln 8\cdot 8^{7x-3}.$$

Zadatak 3.109. *Derivirajte funkcije*

a) $f(x) = \sin(3x)$

b) $f(x) = \sin^2 x$

c) $f(x) = \cos^3(5x+2)$

d) $f(x) = \cos(\ln x)$

e) $f(x) = \ln(\sin^2 x)$

f) $f(x) = e^{x^2+6x-2}$

g) $f(x) = \sqrt{tg^3 x}.$

Rješenje.

a)
$$f'(x) = (\sin(3x))' = \cos(3x) \cdot (3x)' = \cos(3x) \cdot 3 = 3\cos(3x).$$

b)
$$f'(x) = (\sin^2 x)' = 2\sin x \cdot (\sin x)' = 2\sin x \cos x.$$

c)
$$\begin{aligned} f'(x) &= (\cos^3(5x+2))' = 3\cos^2(5x+2) \cdot (\cos(5x+2))' \\ &= 3\cos^2(5x+2)(-\sin(5x+2))(5x+2)' \\ &= -15\cos^2(5x+2)\sin(5x+2). \end{aligned}$$

d)
$$f'(x) = (\cos(\ln x))' = -\sin(\ln x) \cdot (\ln x)' = -\sin(\ln x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{-\sin(\ln x)}{x}.$$

e)
$$\begin{aligned} f'(x) &= (\ln(\sin^2 x))' = \frac{1}{\sin^2 x}(\sin^2 x)' = \frac{1}{\sin^2 x}(2\sin x \cdot (\sin x)') = \\ &= \frac{2\sin x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{2\cos x}{\sin x} = 2\operatorname{ctg} x. \end{aligned}$$

f)
$$f'(x) = (e^{x^2+6x-2})' = e^{x^2+6x-2}(x^2+6x-2)' = e^{x^2+6x-2}(2x+6).$$

g)
$$f'(x) = (\sqrt{tg^3 x})' = \left(tg^{\frac{3}{2}} x\right)' = \frac{3}{2} tg^{\frac{1}{2}} x \cdot (tgx)' = \frac{3}{2} tg^{\frac{1}{2}} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Zadatak 3.110. *Derivirajte sljedeće funkcije*

a) $f(x) = (x+3)^3(x+2)^2$

b) $f(x) = (3x+6)^4(4x+5)^7$

c) $f(x) = (2x+1)\sqrt{x^3+4}.$

Rješenje.

a)

$$\begin{aligned} f'(x) &= ((x+3)^3(x+2)^2)' = ((x+3)^3)'(x+2)^2 + ((x+2)^2)'(x+3)^3 = \\ &= 3(x+3)^2(x+3)'(x+2)^2 + 2(x+2)(x+2)'(x+3)^3 = \\ &= 3(x+3)^2(x+2)^2 + 2(x+2)(x+3)^3. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f'(x) &= ((3x+6)^4(4x+5)^7)' = \\ &= 4(3x+6)^3(3x+6)'(4x+5)^7 + 7(4x+5)^6(4x+5)'(3x+6)^4 = \\ &= 4(3x+6)^3 \cdot 3(4x+5)^7 + 7(4x+5)^6 \cdot 4(3x+6)^4 = \\ &= 12(3x+6)^3(4x+5)^7 + 28(4x+5)^6(3x+6)^4. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} f'(x) &= ((2x+1)\sqrt{x^3+4})' = (2x+1)'\sqrt{x^3+4} + (2x+1)(\sqrt{x^3+4})' = \\ &= 2\sqrt{x^3+4} + (2x+1)\frac{1}{2\sqrt{x^3+4}}(x^3+4)' = \\ &= 2\sqrt{x^3+4} + \frac{3x^2(2x+1)}{2\sqrt{x^3+4}}. \end{aligned}$$

Zadatak 3.111. *Derivirajte funkcije*

a) $f(x) = \sqrt{\frac{2x+4}{3x+5}}$

b) $f(x) = \frac{\sin(4x)}{\cos^2 x}$

c) $f(x) = \frac{e^{x^2+8x+7}}{\ln x}$

d) $f(x) = x^3 \ln(4x+8)$

e) $f(x) = \ln \frac{x^2+4x+2}{x+3}$

f) $f(x) = \sqrt{\sin x \cos x}$.

Rješenje.

a)

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\sqrt{\frac{2x+4}{3x+5}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{2x+4}{3x+5}}}\left(\frac{2x+4}{3x+5}\right)' = \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3x+5}{2x+4}}\frac{(2x+4)'(3x+5)-(3x+5)'(2x+4)}{(3x+5)^2} = \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3x+5}{2x+4}}\frac{2(3x+5)-3(2x+4)}{(3x+5)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3x+5}{2x+4}}\frac{-2}{(3x+5)^2} = -\frac{\sqrt{\frac{3x+5}{2x+4}}}{(3x+5)^2}.
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{\sin(4x)}{\cos^2 x}\right)' = \frac{(\sin(4x))'\cos^2 x-(\cos^2 x)'\sin(4x)}{(\cos^2 x)^2} = \\
&= \frac{\cos(4x)(4x)'\cos^2 x-2\cos x(\cos x)'\sin(4x)}{\cos^4 x} \\
&= \frac{4\cos(4x)\cos^2 x-2\cos x(-\sin x)\sin(4x)}{\cos^4 x} = \\
&= \frac{\cos x(4\cos(4x)\cos x+2\sin x\sin(4x))}{\cos^4 x} \\
&= \frac{4\cos(4x)\cos x+2\sin x\sin(4x)}{\cos^3 x}.
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{e^{x^2+8x+7}}{\ln x}\right)' = \frac{(e^{x^2+8x+7})'\ln x-(\ln x)'e^{x^2+8x+7}}{\ln^2 x} = \\
&= \frac{e^{x^2+8x+7}(x^2+8x+7)'\ln x-\frac{1}{x}e^{x^2+8x+7}}{\ln^2 x} = \frac{e^{x^2+8x+7}(2x+8)\ln x-\frac{1}{x}e^{x^2+8x+7}}{\ln^2 x} \\
&= \frac{e^{x^2+8x+7}(\ln x(2x+8)-\frac{1}{x})}{\ln^2 x}
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= (x^3\ln(4x+8))' = 3x^2\ln(4x+8)+x^3\frac{1}{4x+8}(4x+8)' = \\
&= 3x^2\ln(4x+8)+\frac{4x^3}{4x+8} = 3x^2\ln(4x+8)+\frac{x^3}{x+2}
\end{aligned}
$$

e)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\ln\frac{x^2+4x+2}{x+3}\right)' = \frac{1}{\frac{x^2+4x+2}{x+3}}\left(\frac{x^2+4x+2}{x+3}\right)' = \\
&= \frac{x+3}{x^2+4x+2}\frac{(x^2+4x+2)'(x+3)-(x^2+4x+2)(x+3)'}{(x+3)^2} = \\
&= \frac{x+3}{x^2+4x+2}\frac{(2x+4)(x+3)-(x^2+4x+2)}{(x+3)^2} = \\
&= \frac{1}{x^2+4x+2}\frac{2x^2+10x+12-x^2-4x-2}{x+3} = \\
&= \frac{1}{x^2+4x+2}\frac{x^2+6x+10}{x+3} = \frac{x^2+6x+10}{(x^2+4x+2)(x+3)}.
\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (\sqrt{\sin x\cos x})' = \frac{1}{2\sqrt{\sin x\cos x}}(\sin x\cos x)' = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\sin x\cos x}}((\sin x)'\cos x+(\cos x)'\sin x) = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\sin x\cos x}}(\cos x\cos x-\sin x\sin x) = \\
&= \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{2\sqrt{\sin x\cos x}}.
\end{aligned}$$

3.8.4 Derivacije višeg reda

Derivacija drugog reda (druga derivacija) funkcije $f(x)$, u oznaci $f''(x)$ je derivacija prve derivacije

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

Analogno, derivacija trećeg reda je derivacija druge derivacije $f'''(x) = (f''(x))'$. Općenito, derivaciju $n-$tog reda $f^{(n)}(x)$ dobivamo deriviranjem derivacije $(n-1)$-og reda, ili deriviranjem funkcije f n puta.

Zadatak 3.112. *Odredite drugu derivaciju funkcija*

a) $f(x) = 6x^3 + 7x^2 - 5x + 18$

b) $f(x) = e^{3x^2+5x-1}$

c) $f(x) = \frac{4}{x+5}$

d) $f(x) = \sin^2 x$

e) $f(x) = (2x+7)^4$.

Rješenje.

a)

$$f'(x) = (6x^3 + 7x^2 - 5x + 18)' = 18x^2 + 14x - 5$$

$$f''(x) = (18x^2 + 14x - 5)' = 36x + 14.$$

b)

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^{3x^2+5x-1})' = e^{3x^2+5x-1}(3x^2+5x-1)' = \\ &= e^{3x^2+5x-1}(6x+5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(e^{3x^2+5x-1}(6x+5)\right)' = \\ &= \left(e^{3x^2+5x-1}\right)'(6x+5) + (6x+5)'e^{3x^2+5x-1} = \\ &= e^{3x^2+5x-1}(6x+5)(6x+5) + 6e^{3x^2+5x-1} = \\ &= e^{3x^2+5x-1}(36x^2+60x+31). \end{aligned}$$

c)

$$f'(x) = \left(\frac{4}{x+5}\right)' = \frac{(4)'(x+5) - (x+5)4}{(x+5)^2} = \frac{-4}{(x+5)^2}.$$

ili deriviramo kao složenu funkciju

$$f'(x) = \left(\frac{4}{x+5}\right)' = 4\left(\frac{-1}{(x+5)^2}\right)(x+5)' = \frac{-4}{(x+5)^2}.$$

Računamo drugu derivaciju:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{-4}{(x+5)^2}\right)' = -4\left((x+5)^{-2}\right)' = -4(-2)(x+5)^{-3}(x+5)' = \\ &= 8(x+5)^{-3} = \frac{8}{(x+5)^3}. \end{aligned}$$

d)

$$f'(x) = (\sin^2 x)' = 2\sin x(\sin x)' = 2\sin x\cos x$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (2\sin x\cos x)' = 2\left((\sin x)'\cos x + (\cos x)'\cos x\right) = \\ &= 2\left(\cos x\cos x - \sin x\sin x\right) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x). \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left((2x+7)^4\right)' = 4(2x+7)^3(2x+7)' = \\ &= 4(2x+7)^3 \cdot 2 = 8(2x+7)^3. \end{aligned}$$

$$f''(x) = 48(2x+7)^2.$$

Zadatak 3.113. *Odredite derivacija funkcija*

a) $f(x) = \ln(xe^{4x})$

b) $f(x) = \sqrt{\sin^2 x\cos x + \cos(5x)}$

c) $f(x) = \sqrt{xe^x}$

d) $f(x) = f(x) = e^{\sqrt{xe^x}}$

e) $f(x) = e^{\cos(2x)\sin x + \cos^4 x}$

f) $f(x) = \ln(\sin^4(5x))$.

3.8.5 Ukupne, prosječne i granične vrijednosti

U ekonomiji je uz ukupne vrijednosti ekonomskih veličina jednako važno promatrati prosječne i granične (ili marginalne) vrijednosti.

Primjer 3.23. *1. Promatramo funkciju $C(x)$ koja za zadanu razinu proizvodnje računa ukupan trošak proizvodnje. Tada funkcija prosječnih troškova $AC(x) = \frac{C(x)}{x}$ predstavlja prosječan trošak proizvodnje po jedinici proizvoda. Funkcija $MC(x) = C'(x)$ predstavlja marginalni trošak, to jest dodatan trošak proizvodnje kada na razini x povećamo razinu proizvodnje za jednu (malu) jedinicu.*

2. *Promatramo funkciju $R(x)$ koja za zadanu razinu proizvodnje računa ukupan prihod poduzeća. Tada funkcija prosječnih prihoda $AR(x) = \frac{R(x)}{x}$ predstavlja prosječan prihod po jedinici proizvoda. Funkcija $MR(x) = R'(x)$ predstavlja marginalni (ili granični) prihod, to jest dodatan prihod koji će biti ostvaren kada na razini x povećamo razinu proizvodnje za jednu (malu) jedinicu.*

3. *Promatramo funkciju $\pi(x)$ koja za zadanu razinu proizvodnje računa ukupnu dobit poduzeća. Primijetimo, $\pi(x) = R(x) - C(X)$. Tada funkcija prosječne dobiti $A\pi(x) = \frac{\pi(x)}{x}$ predstavlja prosječnu dobit po jedinici proizvoda. Funkcija $M\pi(x) = \pi'(x)$ predstavlja marginalnu (ili granični) dobit, to jest dodatanu dobit koja će biti ostvarena kada na razini x povećamo razinu proizvodnje za jednu (malu) jedinicu. Primijetimo: $M\pi(x) = \pi'(x) = R'(x) - C'(x)$.*

Primjer 3.24. *Pretpostavimo kako proizvođač poznaje funkciju prihoda $R(x)$ (u kunama) u ovisnosti o potražnji x za nekim proizvodom: $R(x) = 1500x - 0.02x^2, 0 \leq x \leq 1000$.*

a) Izračunajmo granični prihod za $x = 100$.

$$R'(x) = 1500 - 0.04x \Rightarrow R'(100) = 1500 - 0.04 \cdot 100 = 1496.$$

b) Izračunajmo promjenu u prihoda pri povećanju potražnje sa 100 na 101 jedinicu.

$R(100) = 1500 \cdot 100 - 0.02 \cdot 100^2 = 149800$
$R(101) = 1500 \cdot 101 - 0.02 \cdot 101^2 = 151295.98$
$\Longrightarrow R(101) - R(100) = 151295.98 - 149800 = 1495.98 \approx 1496.$

Ukoliko usporedimo rezultate pod a) i b) možemo vidjeti kako se radi o približno jednakim iznosima. Dakle, ukoliko na razini proizvodnje 100 komada povećamo proizvodnju za 1 jedinicu, dobit će približno porasti za $R'(100) = 1496$ kuna.

Zadatak 3.114. *Dana je funkcija prihoda (u tisućama dolara) $R(x) = 100x - x^2$ jedne naftne kompanije gdje x predstavlja broj tisuća barela nafte prodane svaki dan.*

a) *Odredite funkciju koja predstavlja marginalni prihod.*

b) *Odredite marginalni prihod za prodanih 20000 barela nafte ($x = 20$).*

Inerpretirajte rezultat.

c) *Odredite razliku u prihodima za* $x = 20$ *i* $x = 21$.

Rješenje.

a) Marginalni prihod $MR(x) = R'(x) = 100 - 2x$.

b) $M(20) = 60$. *Interpretacija: ukoliko na razini prodaje* 20 *tisuća barela, prodamo jednu dodatnu tisuću barela nafte, prihod će približno porasti za* 60 *tisuća dolara.*

c) $R(21) - R(20) = (100 \cdot 21 - 21^2) - (100 \cdot 20 - 20^2) = 59.0$.

3.8.6 Koeficijent elastičnosti funkcije

U ekonomiji je često od interesa promatrati međuodnose ekonomskih pojava. Promatramo kako jedna ekonomska veličina reagira na promjenu neke druge ekonomske veličine s kojom je povezana. Na primjer, možemo promatrati potražnju za nekim proizvodom kao funkciju cijene (promatramo potražnju u ovisnosti o cijeni) te nas interesira kako povećanje cijene nekog proizvoda utječe na potražnju za tim proizvodom. Ukoliko promatramo povećanje cijene za 1% (na nekoj razini cijene p_0), informaciju o relativnoj promjeni potražnje upravo pokazuje koeficijent elastičnosti funkcije potražnje u promatranoj točki (na razini cijene p_0). Općenito, pod elastičnošću podrazumijeva se sposobnost ekonomske veličine, da reagira, više ili manje intenzivno, na promjenu neke druge veličine koja je s njom povezana.

Neka je zadana funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Koeficijent elastičnosti funkcije $y = f(x)$ u točki x_0 definira se formulom:

$$Ey, x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} y',$$

ili drugačije zapisano:

$$E_{f,x} = \frac{x}{f(x)} f'(x).$$

Ekonomski, koeficijent elastičnosti promatra odnos relativne promjene pojave y u odnosu na malu relativnu promjenu pojave x, pri čemu pojava y ovisi o x.

$$Ey, x = \frac{\text{relativna promjena od } y}{\text{relativna promjena od } x}.$$

U definiciji koeficijenta elastičnosti smo promatrali omjere relativnih promjena za (jako) male promjene varijeble x ($\Delta x \to 0$). Za malu promjenu uzima se postotna promjena nezavisne varijable x za 1% i to povećanje za 1%. Dakle, koeficijent elastičnosti veličine y u odnosu na promjenu veličine x približno je jednak postotnoj promjeni veličine y kao posljedice povećanja pojave x za 1%. Koeficijent elastičnosti interpretiramo na sljedeći način: ako se veličina x poveća u točki x_0 za 1% (dakle na $1.01 \cdot x_0$) tada će se veličina y približno promijeniti za $E_{y,x}$%, i to približno povećati, ako je $E_{y,x} > 0$, odnosno približno smanjiti, ako je $E_{y,x} < 0$.

Primjer 3.25. *Zadana je funkcija $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 5$. Izračunajte koeficijent elastičnosti funkcije f u odnosu na varijablu x za $x = 2$ i interpetirajte dobiveni rezultat.*

Rješenje.
$f'(x) = 3x^2 + 4x - 1$
$E_{f,x} = \frac{x}{f(x)} f'(x) = \frac{x}{x^3+2x^2-x-5}(3x^2 + 4x - 1)$
$E_{f,x}(x = 2) = \frac{38}{9} = 4.22.$
Ako se varijabla x na razini $x = 2$ poveća za 1%, funkcijska vrijednost će se povećati približno za 4.22%.

Zadatak 3.115. *Dana je funkcija $y = \sqrt{x^2 - 1}$. Odredite $x > 0$ takav da njegovo povećanje od 1% uzrokuje povećanje od y za 2%.*

Rješenje.
$2 = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{x^2}{x^2-1}$
$2 = 2x^2 - 1$
$x^2 = 1$
$x = 1$ *(uvažavamo činjenicu $x \geq 0$).*

Zadatak 3.116. *Zadana je funkcija troškova $T(q) = q^3 - 2q$, gdje je q količina proizvodnje. Izračunajte koeficijent elastičnosti u odnosu na proizvodnju $q = 2$ i interpretirajte rezultat.*

Rješenje.
$T'(q) = 3q^2 - 2$
$E_{T,q} = \frac{q}{T(q)} T'(q) = \frac{q}{q^3-2q}(3q^2 - 2)$
$E_{T,q}(q = 2) = 5.$
Ako se proizvodnja na razini $q = 2$ poveća za 1%, troškovi će se povećati za 5%.

3.9 Ekstremi i monotonost funkcije

Pojam monotonosti i ekstrema već je opisan u odjeljku gdje su opisana neka globalna svojstva funkcija. Sjetimo se, funkcija je monotona ako je rastuća ili padajuća. Pojam monotonosti funkcije usko je povezan sa derivacijom funkcije.

Neka je $f : X \to \mathbb{R}$ rastuća funkcija, dakle vrijedi: ako za svaki $x_1, x_2 \in I$ vrijedi $x_1 \leq x_2$ (f rastuća na I) tada je $f(x_1) \leq f(x_2)$ to jest$'(x) > 0$ za sve $x \in I$.

Naime, vrijedi:

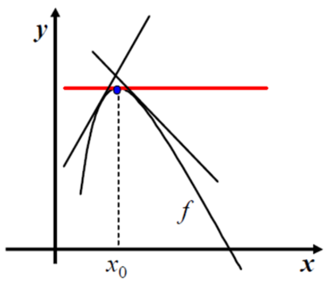
$$\begin{aligned} f(x_1) &\leq f(x_2) \Longrightarrow f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \text{ i } x_2 \geq x_1 \Longrightarrow x_2 - x_1 > 0 \\ &\Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0, \end{aligned}$$

što vrijedi za sve $x_1, x_2 \in I$.

Stoga za svaki $x_0 \in I$ imamo $f'(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$.

Dakle, ukoliko je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ rastuća na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ tada je $f'(x) \geq 0$ za sve $x \in I$. Analogno, vrijedi ukoliko je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ padajuća na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ tada je $f'(x) \leq 0$ za sve $x \in I$.

Razmotrimo sada kako se traže lokalni ekstremi funkcije. Za početak, razmotrimo slučaj traženja maksimuma funkcije. Na donjem grafu je prikazana funkcija koja ima maksimum u točki x_0.Na grafu se može vidjeti kako je tangenta u točki makismuma (u točki x_0) paralelna s $x-$osi, te je njen koeficijent smjera jednak nuli. Sjetimo se, dervacija funkcije u točki x_0 jednaka je koeficijentu smjera tangente t povučene na graf funkcije u točki $(x_0, f(x_0))$.Prema tome, vrijednost prve derivacije u točki makismuma je jednaka nuli. Ovdje smo "prešutno" pretpostavili da prva derivacija funkcije postoji.



Nadalje, primijetimo kako postoji okolina oko točke x_0 tako da

- funkcija f raste za $x \leq x_0$, (i stoga je $f'(x) > 0$).

- funkcija f pada za $x \geq x_0$, (i stoga je $f'(x) < 0$).

U samoj točki x_0 predznak derivacije se mijenja pa je $f'(x_0) = 0$.

Na sličan način se analizira i slučaj traženja minimuma funkcije. Tada je je tangenta u točki minimuma (u točki x_0) paralelna s $x-$osi, te je njen koeficijent smjera jednak nuli. Prema tome, vrijednost prve derivacije u točki minimuma je jednaka nuli. Nadalje, primijetimo kako postoji okolina oko točke x_0 tako da:

- funkcija f pada za $x \leq x_0$, (i stoga je $f'(x) < 0$).
- funkcija f raste za $x \geq x_0$, (i stoga je $f'(x) > 0$).

U samoj točki x_0 predznak derivacije se mijenja pa je $f'(x_0) = 0$.

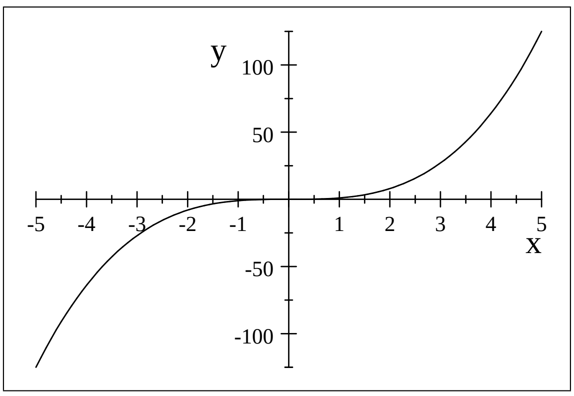
Uvjet $f'(x_0) = 0$ nužan je uvjet za egzistenciju lokalnog ekstrema. Dakle, ukoliko funkcija $f(x)$ ima lokalni ekstrem u točki x_0 tada je $f'(x_0) = 0$. Točke koje su rješenja jednadžbe $f'(x_0) = 0$ nazivamo **stacionarnim točkama** funkcije $f(x)$. Stacionarne točke su kandidati za ekstreme funkcije $f(x)$. Dakle, ne moraju sve stacionarne točke ujedno biti i ekstremi funkcije, što znači da uvjet $f'(x)$ nije i dovoljan uvjet za egzistenciju ekstrema. Slijedi primjer takvog slučaja.

Primjer 3.26. *Zadana je funkcija $f(x) = x^3$.*

Nađimo stacionarne točke ove funkcije.

$f'(x) = 0 \Longrightarrow 3x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$ *je stacionarna točka.*

Na grafu funkcije $f(x) = x^3$ možemo uočiti kako $x = 0$ nije ekstrem funkcije f.Primijetimo kako je funkcija $f(x) = x^3$ rastuća na cijeloj domeni te je neograničena.



Dakle, $x = 0$ je stacionarna točka, ali nije i ekstrem funkcije.

Da bi funkcija $f(x)$ imala ekstrem u točki $x = x_0$ nužno je i dovoljno da vrijedi:

1. $f'(x_0) = 0$,
2. prva derivacija mijenja predznak prolazeći kroz x_0.

Vidjeli smo kako pronaći ekstrem funkcije $f(x)$ (ako postoji). Još preostaje vidjeti kako odrediti radi li se o minimumu ili maksimumu funkcije $f(x)$.

U slučaju kada funkcija $f(x)$ u točki $x = x_0$ ima maksimum vrijedi:

$$\begin{aligned}
\text{za } x &< x_0,\ f(x) \text{ raste} \Longrightarrow f'(x) > 0,\\
\text{za } x &= x_0 \text{ (stacionarna točka)} \Longrightarrow f'(x) = 0,\\
\text{za } x &> x_0,\ f(x) \text{ pada} \Longrightarrow f'(x) < 0.
\end{aligned}$$

Očito je kako u ovom slučaju prva derivacija pada na okolini točke x_0 što znači da je derivacija te prve derivacije f'' u točki x_0 negativna, to jest $f''(x_0) < 0$.

U slučaju kada funkcija $f(x)$ u točki $x = x_0$ ima minimum vrijedi:

$$\begin{aligned}
\text{za } x &< x_0,\ f(x) \text{ pada} \Longrightarrow f'(x) < 0,\\
\text{za } x &= x_0 \text{ (stacionarna točka)} \Longrightarrow f'(x) = 0,\\
\text{za } x &> x_0,\ f(x) \text{ raste} \Longrightarrow f'(x) > 0.
\end{aligned}$$

Očito je kako u ovom slučaju prva derivacija raste na okolini točke x_0 što znači da je derivacija te prve derivacije f'' u točki x_0 pozitivna, to jest $f''(x_0) > 0$.

Dakle, ekstrem funkcije tražimo na sljedeći način:

1. Deriviramo funkciju$f(x)$, tj. računamo $f'(x)$.
2. Tražimo stacionarne točke funkcije rješvajući jednadžbu $f'(x) = 0$.
3. Za svaku stacionarnu točku provjeravamo je ona ujedno i ekstrem funkcije. Provjeru vršimo na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
f''(x_0) &> 0 \Longrightarrow x_0 \text{ je točka minimuma}\\
f''(x_0) &< 0 \Longrightarrow x_0 \text{ je točka maksimuma}\\
f''(x_0) &= 0 \Longrightarrow \text{ u } x_0 \text{ ne donosimo odluku, potrebna daljnja analiza.}
\end{aligned}$$

U slučaju kada je $f''(x_0) = 0$ provodi se analiza derivacija višeg reda. Deriviranje se nastavlja sve do prve derivacije višeg reda koja je različita od nula u točki x_0. Dakle, tražimo prvi n takav da je $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Ukoliko je n neparan, tada funkcija f nema ekstrem u točki x_0. Ukoliko je n paran tada funkcija f ima ekstrem u točki x_0. Pri tome, ako je $f^{(n)}(x_0) > 0$ funkcija u točki x_0 ima minimum, a ako je $f^{(n)}(x_0) < 0$ funkcija u x_0 ima maksimum.

Primjer 3.27. *Na ovome primjeru ćemo pokazati kako odrediti lokalne ekstreme i intervale monotonosti funkcije $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 25$. Moguće je problem rješavati na dva načina: prvo odrediti točke lokalnih ekstrema, a zatim intervale monotonosti funkcije, ili prvo odrediti intervale monotonosti funkcije, a zatim lokalne ekstreme funkcije. U ovom primjeru prikazat ćemo oa načina.*

***1. način**: prvo odredimo lokalne ekstreme funkcije, a zatim intrevale monotonosti.*

U svakom pristupu prvi korak je derivirati funkciju $f(x)$.

Deriviramo funkciju

$$f'(x) = 6x^2 - 6x.$$

Tražimo nul točke derivacije

$$6x^2 - 6x = 0 \Longrightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1.$$

*Tako dobivamo **stacionarne točke** (nul-točke prve derivacije). Dakle, 0 i 1 su stacionarne točke. One mogu, ali ne moraju biti ekstremi funkcije. Daljnju analizu provodimo na dva načina:*

Prvo tražimo ekstreme, zatim određujemo intervale rasta i pada. Provjeravamo jesu li dobivene stacionarne točke ekstremi. Treba nam druga derivacija funkcije.

$$f''(x) = 12x - 6.$$

Provjeravamo je li stacionarna točka ujedno i ekstrem funkcije:

$$\begin{aligned} f''(0) &= 12 \cdot 0 - 6 = -6 < 0 \Longrightarrow 0 \text{ je točka maksimuma} \\ f''(1) &= 12 \cdot 1 - 6 = 6 > 0 \Longrightarrow 1 \text{ je točka minimuma} \end{aligned}$$

Vrijednosti koje se postižu u minimumu, odnosno maksimumu:

$$\begin{aligned} f(0) &= 2 \cdot 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 25 = 25, \\ f(1) &= 2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 25 = 24. \end{aligned}$$

Minimum ćemo označavati sa malim slovom m *, dok maksimum označavamo sa velikim slovom* M *:*

$$m(1,24),\ M(0,25)$$

Točke minimuma i maksimuma možemo i označiti na više načina, na primjer:$T_m(1,24)$, $T_M(0,25)$ *ili* $T_{\min}(1,24)$, $T_{\max}(0,25)$.

Još je potrebno odrediti intervale rasta i pada. Kako funkcija lijevo od maksimuma raste, a desno od maksimuma pada, te lijevo od minimuma pada, a desno od minimuma raste, u našem primjeru možemo zaključiti:

funkcija raste na $\langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$ *, a pada na intervalu* $\langle 0, 1\rangle$ *.*

2 način*: prvo odredimo intervale monotonosti, a zatim lokalne ekstreme funkcije.*

Intervale rasta i pada određujemo pomoću prve derivacije i to na sljedeći način: ukoliko na intervalu I *prva derivacija* f'*poprima samo pozitivne vrijednosti to znači da na istom intervalu funkcija* f *raste. Analogno, ukoliko na intervalu* I *prva derivacija poprima samo negativne vrijednosti, to znači da funkcija* f *na istom intervalu pada. U analizi su nam potrebne nultočke prve derivacije jer se u njima mijenja predznak. Crtamo tablicu u kojoj određujemo intervale monotonosti i ekstreme funkcije.*

	$\langle -\infty, 0\rangle$	$\langle 0, 1\rangle$	$\langle 1, +\infty\rangle$
$f'(x) = 6x^2 - 6x$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Sada iz tablice očitamo lokalne ekstreme poštujući pravilo da funkcija lijevo od točke maksimuma raste, a desno pada, te da funkcija lijevo od minimuma pada a desno raste. Slijedi da funkcija f *u* 0 *postiže maksimum, dok u* 1 *postiže minimum, kao i u prvom dijelu zapišemo*

$$m(1,24), M(0,25).$$

Zadatak 3.117. *Odredite lokalne ekstreme i intervale monotonosti funkcije* $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 3x^3$.

Zadatak 3.118. *Rješenje.*

Deriviramo: $f'(x) = x^3 - 9x^2$.

Tražimo nultočke prve derivacije: $f'(x) = 0 \Longrightarrow x^3 - 9x^2 = 0 \Longrightarrow x^2(x-9) = 0 \Longrightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 9$.

Dalje, analizu monotonosti provest ćemo na dva načina.

1. *Prvo tražimo ekstreme, koristimo drugu derivaciju:*

   $f''(x) = 3x^2 - 18x.$

   $f''(0) = 0 \Longrightarrow$ *ne donosimo odluku.*

   $f''(9) = 3 \cdot 9^2 - 18 \cdot 9 = 81 > 0 \Longrightarrow$ *u 9 se postiže se minimum.*

   Vrijednost minimuma je $f(9) = \frac{1}{4}9^4 - 3 \cdot 9^3 = -\frac{2187}{4}$.

   Označimo minimum $m(9, -\frac{2187}{4})$.

   Funkcija pada na intervalu $\langle -\infty, 9\rangle$, *a raste na intervalu* $\langle 9, +\infty\rangle$.

2. *Drugi način je prvo tražiti intervale monotonosti, zatim ekstreme.*

	$\langle -\infty, 0\rangle$	$\langle 0, 9\rangle$	$\langle 9, +\infty\rangle$
x^2	$+$	$+$	$+$
$x-9$	$-$	$-$	$+$
f'	$-$	$-$	$+$
f	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

   Iz tablice očitavamo jedini ekstrem, radi se o minimumu u točki 9, *označimo ga* $m(9, -\frac{2187}{4})$.

Zadatak 3.119. *Odredite lokalne ekstreme i intervale monotonosti funkcije* $f(x) = e^{2x^3+3x^2-12x}$.

Rješenje.

Deriviramo : $f'(x) = e^{2x^3+3x^2-12x}(6x^2 + 6x - 12)$.

Sada tražimo nultočke $e^{2x^3+3x^2-12x}(6x^2 + 6x - 12) = 0$.

Primijetimo kako je $e^{2x^3+3x^2-12x} > 0$ *za sve* $x \in \mathbb{R}$.

$6x^2 + 6x - 12 = 0 \Longrightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 1.$

Crtamo tablicu

	$\langle -\infty, -2\rangle$	$\langle -2, 1\rangle$	$\langle 1, +\infty\rangle$
$e^{2x^3+3x^2-12x}$	$+$	$+$	$+$
$6x^2+6x-12$	$+$	$-$	$+$
f'	$+$	$-$	$+$
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Funkcija raste na $< -\infty, -2 > \cup < 1, +\infty >$, *a pada na* $< -2, 1 >$.

Odredimo ekstreme:

točka maksimuma je -2 . *Vrijednost maksimuma je* $f(-2) = e^{2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2} = 54.598$.

točka minimuma je 1. *Vrijednost maksimuma iznosi* $f(1) = e^{2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1} = 0.00091$.

$$M(-2, 54.59),\ m(1, 0.00091).$$

Zadatak 3.120. *Odredite lokalne ekstreme i intervale monotonosti funkcije* $f(x) = x^4 - 50x^2$.

Rješenje.

Deriviramo $f'(x) = 4x^3 - 100x$.

Stacionarne točke: $4x^3 - 100x = 0 \Longrightarrow 4x(x^2 - 25) = 0 \Longrightarrow x_1 = 0, x_2 = -5, x_3 = 5$.

Crtamo tablicu:

	$\langle -\infty, -5\rangle$	$\langle -5, 0\rangle$	$\langle 0, 5\rangle$	$\langle 5, +\infty\rangle$
$4x$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x^2 - 25$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Funkcija pada na intervalu $\langle -\infty, -5\rangle \cup \langle 0, 5\rangle$ *, a raste na* $\langle -5, 0\rangle \cup \langle 5, +\infty\rangle$ *.*

Funkcija ima dva minimuma i to u točkama -5 *i* 5*, vrijednosti minimuma iznose* $f(-5) = (-5)^4 - 50(-5)^2 = -625$ *odnosno* $f(5) = 5^4 - 50 \cdot 5^2 = -625$*, te jedan maksimum u točki* 0 *i taj maksimum iznosi* $f(0) = 0^4 - 50 \cdot 0^2 = 0$*.*

Lokalne ekstreme zapišemo u obliku

$$m_1(-5, -625), M(0, 0), m_2(5, -625).$$

Zadatak 3.121. *Odredite intervale monotonosti i lokalne ekstreme funkcija*

a) $f(x) = \frac{1}{x^3+3x^2-9x+1}$

(Rj.: Funkcija pada na $\langle -\infty, -3\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$ *, raste na* $\langle -3, 1\rangle$ *.*

$M(1, -\frac{1}{4}),\ m(-3, \frac{1}{28})$*.)*

b) $f(x) = \frac{x^2+9}{x}$

(Rj.: Funkcija raste na $\langle -\infty, -3\rangle \cup \langle 3, +\infty\rangle$ *, pada na* $\langle -3, 3\rangle$*.*

$M(-3, -6), m(3, 6)$*.)*

c) $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 100$

(Rj.: Funkcija raste na $\langle -\infty, -5\rangle \cup \langle 0, 1\rangle$ *, pada na* $\langle -5, 0\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$ *;*

$M(-5, -139.5), m(0, 100), M(1, 100.91)$*.)*

Zadatak 3.122. *Zadana je funkcija prosječnih prihoda u ovisnosti o količini proizvodnje q*

$$AR(q) = -\frac{1}{4}q^4 + 3q^3 - 7q^2 + 100.$$

Odredite lokalne ekstreme i intervale rasta i pada funkcije $AR(q)$.

Rješenje.

Prvo deriviramo funkciju $AR(q)$.

$AR'(q) = -q^3 + 9q^2 - 14q.$

Dalje, tražimo stacionarne točke rješavanjem jednadžbe

$$-q^3 + 9q^2 - 14q = 0 \Rightarrow q(q^2 + 9q - 14) = 0.$$

Dobivamo stacionarne točke $q_1 = 0, q_2 = 2, q_3 = 7$.

Crtamo tablicu i uvažavamo da je $q > 0$.

	$[0, 2 >$	$\langle 2, 7\rangle$	$\langle 7, +\infty\rangle$
q	$+$	$+$	$+$
$q^2 + 9q - 14$	$+$	$-$	$+$
$AR'(q)$	$+$	$-$	$+$
$AR(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Dakle, maksimum funkcije prosječnih troškova postiže se za $q = 2$, a minimum za $q = 7$ i $q = 0$.

Računamo vrijednosti minimuma i maksimuma:

$AR(0) = 100,$

$AR(2) = -\frac{1}{4} \cdot 2^4 + 3 \cdot 2^3 - 7 \cdot 2^2 + 100 = 92,$

$AR(7) = -\frac{1}{4} \cdot 7^4 + 3 \cdot 7^3 - 7 \cdot 7^2 + 100 = \frac{743}{4}.$

Zadatak 3.123. *To jest, imamo točku lokalnog maksimuma $M(2, 92)$ i dvije točke lokalnih minimuma $m_1(0, 100)$ i $m_2(7, \frac{743}{4})$.Funkcija AR raste za $q \in \langle 0, 2\rangle \cup \langle 7, +\infty\rangle$ i pada za $\langle 2, 7\rangle$.*

Zadatak 3.124. *Zadana je funkcije $f(x)$ koja opisuje dobit poduzeća ovisnosti o količini proizvodnje x*

$$f(x) = \frac{x + 2}{x^2 + 2}.$$

a) Odredite kolika jdobit na razini $x = 3$.

b) Odredite intervale rasta i pada te lokalne ekstreme funkcije $f(x)$.

Rješenje.

a) $f(3) = \frac{3+2}{3^2+2} = \frac{5}{11}.$

b) $f'(x) = \left(\frac{x+2}{x^2+2}\right)' = \frac{x^2+2-2x^2-4x}{(x^2+2)^2} = \frac{-x^2-4x+2}{(x^2+2)^2}.$

Rješavanjem jednadžbe $f'(x) = 0$ dobivamo stacionarne točke $x_1 = 0.45$ i $x_2 = -4.\,45$, no primijetimo da rješenje $x_2 = -4.\,45$ nema ekonomskog smisla budući da $x > 0$.Stoga ga odbacujemo i samu tablicu u kojoj analiziramo rast i pad funkcije promatrano samo za $x > 0$.

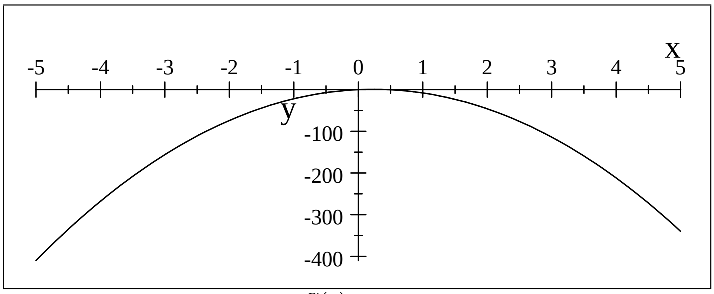
	$[0, 0.45 >$	$\langle 0.45, +\infty \rangle$
$-x^2 - 4x + 2$	$+$	$-$
$(x^2 + 2)^2$	$+$	$+$
$f'(x) = \frac{-x^2-4x+2}{(x^2+2)^2}$	$+$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

Funkcija postiže maksimum u točki $M(0.45, 1.11)$.Funkcija raste za $x \in [0, 0.45 >$, a pada za $x \in \langle 0.45, +\infty \rangle$.

Zadatak 3.125. *Zadana je funkcija ukupnih troškova $C(q) = -15q^3 + 7q^2$. Na kojem su nivou proizvodnje prosječni troškovi minimalni i koliko iznose?*

Rješenje.

Funkcija prosječnih troškova dana je izrazom $AC(q) = \frac{C(q)}{q} = -15q^2 + 7q$.



$AC(q) = \frac{C(q)}{q} = -15q^2 + 7q$

$AC'(q) = 0 \Rightarrow q = \frac{7}{30} \Rightarrow T_{\min}(\frac{7}{30}) = 0.191.$

Zadatak 3.126. *Zadane su funkcije ukupnih prihoda $R(q) = 12q - 4q^2$ i ukupnih troškova $T(q) = 6q^2 - 15q$, gdje je q količina proizvodnje. Za koju razinu proizvodnje se ostvaruje maksimalna dobit?*

Rješenje.

Funkcija dobiti: $D(q) = R(q) - T(q) = 27q - 10q^2$.

$D'(q) = 27 - 20q = 0 \Rightarrow q = \frac{27}{20}$.

$D''(q) = -20 < 0$ *pa je u točki $q = \frac{27}{20}$ lokalni maksimum.*

$D(\frac{27}{20}) = 18.225$.

Maksimalna dobit iznosi 18.225, a ostvaruje se na razini proizvodnje $\frac{27}{20}$.

Zadatak 3.127. *Zadane su funkcije ukupnih prihoda* $R(q) = -12q^2+10q+7$ *i ukupnih troškova* $T(q) = 2q^2+9q-7$*, gdje je q količina proizvodnje. Za koju razinu proizvodnje se ostvaruje maksimalna dobit i koliko iznosi maksimalna moguća dobit?*

(Rješenje: $q = \frac{1}{28}$*,* $D_{\max}(\frac{1}{28}) = 0.518$*.)*

Zadatak 3.128. *Zadane su funkcije ukupnih prihoda* $R(q) = 13q^2 - q$ *i funkcija ukupnih troškova* $C(q) = 2q^2-10q$*, gdje q označava količinu proizvodnje.*

a) *Odredite funkciju dobiti i izračunajte kolika je dobit na razini proizvodnje* $q = 3$*.*

b) *Odredite funkciju granične dobiti i interpretirajte rezultat na razini* $q = 2$*.*

3.10 Konveksnost i konkavnost funkcije

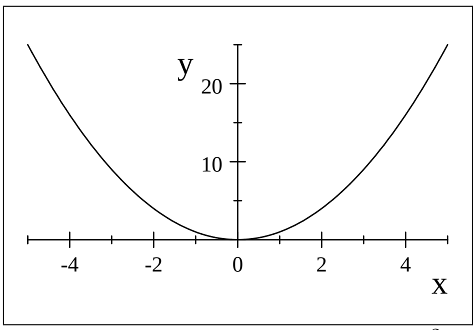
Neka je funkcija f dva puta diferencijabilna na otvorenom intervalu I (postoji druga derivacija). Ako je na tom intervalu $f''(x) > 0$, onda je funkcija **konveksna**. S druge strane, ako je na tom intervalu $f''(x) < 0$ tada je funkcija **konkavna**. Konveksnost i konkavnost se može opisati i pomoću grafa

funkcije. Za graf derivabilne funkcije f kažemo da je konkavan u intervalu $\langle a, b\rangle$ ako se on nalazi ispod tangente u bilo kojoj točki navedenog intervala. Suprotno, za graf derivabilne funkcije f kažemo da je konveksan u intervalu $\langle a, b\rangle$ ako se on nalazi iznad tangente u bilo kojoj točki navedenog intervala.

Primjer 3.28. *Pokažimo da je funkcija* $f(x) = x^2$ *konveksna funkcija.*

Računamo drugu derivaciju funkcije.

$f'(x) = 2x \Rightarrow f''(x) = 2 > 0$ *za sve x pa je funkcija konveksna.*

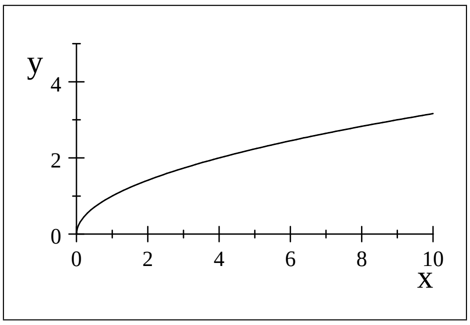


Konveksna funkcija $f(x) = x^2$

Primjer 3.29. *Pokažimo da je funkcija* $f(x) = \sqrt{x}$, $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *konkavna.*

Računamo drugu derivaciju funkcije.

$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f''(x) = \frac{-1}{4}x^{\frac{-3}{2}} < 0$ *za sve* $x \in \mathbb{R}^+$ *pa je funkcija konkavna.*



Konkavna funkcija $f(x) = \sqrt{x}$

Funkcija na svojoj domeni može biti dijelom konveksna, a dijelom konkavna. Točka u kojoj funkcija iz konveksnog oblika prelazi u konkavan (ili obratno) naziva se **točka infleksije**. Budući da druga derivacija u točki infleksije mijenja smjer vrijedi da je vrijednost druge derivacije u točki infleksije jednaka 0. Dakle, ako je x_0 točka infleksije funkcije $f(x)$ tada je $f''(x) = 0$.

Zadatak 3.129. *Odredite intervale konveksnosti i konkavnosti funkcije* $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

Rješenje.

Računamo drugu derivaciju funkcije $f''(x) = \frac{2x\left(x^2-3\right)}{(1+x^2)^3}$.

Računamo točke infleksije

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x\left(x^2-3\right)}{\left(1+x^2\right)^3} = 0 \Longrightarrow 2x\left(x^2-3\right) = 0.$$

Dobivamo tri točke infleksije $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{3}$ *i* $x_3 = -\sqrt{3}$. *Još je potrebno odrediti predznake druge derivacije i na temelju toga donijeti zaključak o konveksnosti i konkavnosti. Analizu prikazujemo u tablici pri čemu koristimo oznaka konveksnosti* $\cup$, *dok konkavnosti označujemo s* $\cap$.

$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Zadatak 3.130. *Odredite područje konveksnosti i konkavnosti funkcije dane izrazom* $f(x) = x^3 + x^2 - 6x + 4$.

(Rješenje. Funkcija je konkavna na intervalu $< 0, -0.3 >$ *i konveksna na intervalu* $< -0.3, +\infty >$ *.)*

Zadatak 3.131. *Dana je funkcija proizvodnje* $Q(L)$ *u ovisnosti o radu* L *s* $Q(L) = -10L^3 + 300L^2$.

a) *izvedite funkciju produktivnosti* $\frac{Q}{L}$ *i granične produktivnosti* $\frac{dQ}{dL}$ *rada,*

b) *izračunajte stopu promjene proizvodnje na nivou* $L = 10$ *i interpretirajte rezultat,*

c) *izračunajte količinu rada koja maksimizira proizvodnju. Koliko iznosi maksimalna proizvodnja?*

d) *Nađite intervale rastućih i opadajućih prinosa i povežite to s intervalima konveksnosti i konkavnosti funkcije proizvodnje. Što zaključujete?*

Rješenje.
a) $\frac{Q}{L} = \frac{-10L^3+300L^2}{L} = -10L^2 + 300L$, $\frac{dQ}{dL} = -30L^2 + 600L$.
b) $\frac{dQ}{dL}(10) = Q'(10) = 3000$. *Ako se na razini* $L = 10$ *rad poveća za jednu malu jedinicu, proizvodnja će se povećati približno za* 3000 *jedinica.*
c) $Q'(L) = -30L^2 + 600L = 0$.
$L(-30L + 600) = 0 \Rightarrow L = 20$.
$Q'(L) = -60L + 600$.
$Q''(L) = -60$.
Za količinu rada $L = 20$ *postiže se maksimalna proizvodnja i ona iznosi* $Q(20) = -10 \cdot 20^3 + 300 \cdot 20^2 = 40000$.
d) Prinosi će biti rastući za one količine rada gdje je druga derivacija pozitivna, a opadajući gdje je negativna.
$Q''(L) = -60L + 600 > 0$ *za* $L < 10$.
$Q''(L) = -60L + 600 < 0$ *za* $L > 10$.
Dakle, za $L \in (0, 10)$ *prinosi su rastući i u tom intervalu je druga derivacija funkcije proizvodnje pozitivna, a za* $L \in (10, +\infty)$ *prinosi su padajući i u tom intervalu je druga derivacija funkcije proizvodnje negativna.*

Primjer 3.30. *Dana je funkcija ukupnih troškova* $T(q) = \frac{2}{3}q^3 - 4q^2 + q - 2$.

a) *izvedite funkciju graničnih troškova,*

b) *odredite intervale konkavnosti i konveksnosti funkcije ukupnih troškova.*

Rješenje. a) $T'(q) = 2q^2 - 8q + 1$,
b) $T''(q) = 4q - 8 = 0$ *Funkcija je konveksna za* $4q - 8 > 0$ *odnosno za* $q > 2$. *Funkcija je konkavna za* $4q - 8 < 0$ *odnosno za* $q < 2$.

Zadatak 3.132. *Dana je funkcija ukupnih prihoda* $R(q) = \frac{1}{2}q^3 - 2q^2 + q + 6$.

a) *izvedite funkciju graničnih prihoda,*

b) *odredite intervale konkavnosti i konveksnosti funkcije ukupnih prihoda.*

Rješenje. a) $R'(q) = \frac{3}{2}q^2 - 4q + 1$
b) Konkavna za $q \in \left(0, \frac{4}{3}\right)$, *konveksna za* $q \in \left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$.

Zadatak 3.133. *Zadana je funkcija koja opisuje broj prodanih proizvoda u odnosu na sredstva* x *uložena u reklamu* $f(x) = \sqrt{x+2}$. *Ispitajte konveksnost/konkavnost funkcije.*
Rješenje.
$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}, f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{(x+2)^3}} < 0$
Druga derivacija funkcije f *je negativna na cijeloj svojoj domeni što znači da je na cijeloj domeni funkcija* f *konkavna.*

Zadatak 3.134. *Zadana je funkcija koja opisuje potražnju za nekim proizvodom* $f(x) = \frac{1}{p+1}$. *Ispitajte konveksnost/konkavnost ove funkcije.*
Rješenje. Funkcija je konveksna na cijeloj svojoj domeni.

3.11 Skiciranje grafa funkcije

Graf funkcije jedne varijable $y = f(x)$ je skup svih točaka $(x, f(x))$ u ravnini gdje je $x \in D_f$. Kako bismo bez mnogo muke grafički prikazali funkciju potrebno je:

1. Odrediti domenu funkcije D_f.
2. Odrediti sjecišta sa koordinatnim osima:
    - sjecište sa $x - osi$ (rješavamo jednadžbu $f(x) = 0$),
    - sjecište sa $y - osi$ $(x = 0)$.
3. Odrediti asimptote funkcije.
4. Odrediti intervale monotonosti i lokalne ekstreme funkcije.

Naravno, ukoliko bismo željeli dobiti što precizniji grafički prikaz funkcije, preporuka je provesti i analizu konveksnosti i konkavnosti, periodičnosti i parnosti, odnosno neparnosti funkcije. No, mi ćemo se zadržati na ove četiri točke. Potrebno je napomenuti kako je u mnogim slučajevima moguće skicirati graf funkcije bez provođenja analize u ova četiri koraka.

Primjer 3.31. *Skicirajmo graf funkcije* $f(x) = \frac{9}{x^2-9}$.

1. *Odredimo domenu funkcije*

   $x^2 - 9 \neq 0 \Longrightarrow x \neq \pm 3 \Longrightarrow D = \mathbb{R} \backslash \{-3, 3\}$.

2. *Odredimo sjecište sa* $x - osi$:

   $y = 0 \Longrightarrow \frac{9}{x^2-9} = 0 \Longrightarrow$ *nema rješenja, tj. funkcija nema nul-točaka.*

   Odredimo sjecište sa $y - osi$:

   $x = 0 \Longrightarrow y = \frac{9}{0-9} = -1$.

3. *Odredimo asimptote funkcije*

   HORIZONTALNA ASIMPTOTA

   $$\lim_{x \to +\infty} \frac{9}{x^2-9} = 0,$$

   $$\lim_{x \to -\infty} \frac{9}{x^2-9} = 0.$$

   $y = 0$ *je horizontalna asimptota.*

   VERTIKALNA ASIMPTOTA

   Tražimo je u rubovima domene, u našem primjeru to su točke $-3, 3$.

   $\lim_{x \to -3^-} \frac{9}{x^2-9} = (\frac{9}{0^+}) = +\infty \qquad \lim_{x \to -3^+} \frac{9}{x^2-9} = (\frac{9}{0^-}) = -\infty.$

   $\Longrightarrow x = -3$ *je V.A.*

   $\lim_{x \to 3^-} \frac{9}{x^2-9} = (\frac{9}{0^-}) = -\infty \qquad \lim_{x \to 3^+} \frac{9}{x^2-9} = (\frac{9}{0^+}) = +\infty.$

   $\Longrightarrow x = 3$ *je V.A.*

   Kosu asimptotu ne računamo jer imamo horizontalnu.

4. *Odredimo intervale monotonosti i lokalne ekstreme*

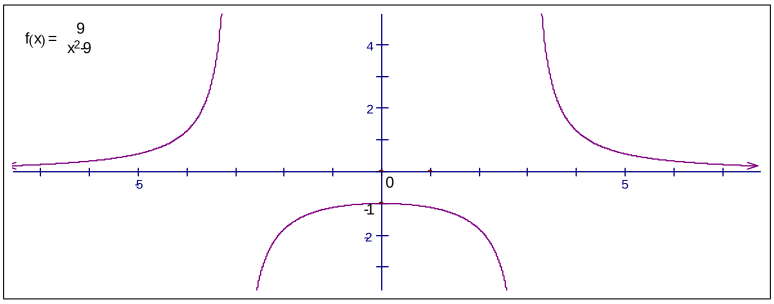
   $$f'(x) = \frac{-18x}{(x^2-9)^2},$$

   $$f'(x) = 0 \Longrightarrow x = 0.$$

	$\langle -\infty, 0 \rangle$	$\langle 0, +\infty \rangle$
$-18x$	$+$	$-$
$(x^2-9)^2$	$+$	$+$
f'	$+$	$-$
f	$\nearrow$	$\searrow$

   Maksimum se postiže u 0 *i iznosi* $f(0) = -1 \Longrightarrow M(0, -1)$.

   Dobivamo skucu:



Zadatak 3.135. *Skicirajte graf funkcije* $f(x) = \frac{1-9x}{3x+6}$.

1. *Odredimo domenu funkcije*

   $3x + 6 = 0 \Longrightarrow x = -2.$

2. *Odredimo sjecišta sa koordinatnim osima*

   Sjecište sa $x-osi$*:* $\quad y = 0 \Longrightarrow \frac{1-9x}{3x+6} = 0 \Longrightarrow 1 - 9x = 0 \Longrightarrow x = \frac{1}{9}.$

   Sjecište sa $y-osi$*:* $\quad x = 0 \Longrightarrow \frac{1-0}{0+6} = \frac{1}{6}.$

3. *Odredimo asimptote funkcije:*

   Horizontalna asimptota:

   $$\lim_{x\to-\infty} \frac{1-9x}{3x+6} = -3 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1-9x}{3x+6} = -3.$$

   $\Longrightarrow y = -3$ *je H.A.*

   Vertikalna asimptota:

   $$\lim_{x\to-2^-} \frac{1-9x}{3x+6} = \left(\frac{19}{0^-}\right) = -\infty \qquad \lim_{x\to-2^+} \frac{1-9x}{3x+6} = \left(\frac{19}{0^+}\right) = +\infty$$

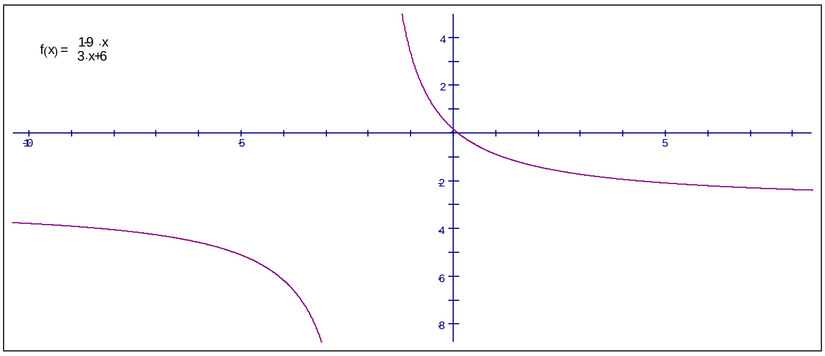
   $\Longrightarrow x = -2$ *je V.A.*

   Kosu asimptotu ne tražimo jer imamo horizontalnu.

4. *Odredimo intervale monotonosti:*

   $f'(x) = \frac{-57}{(3x+6)^2} \Longrightarrow$*funkcija je padajuća na cijeloj domeni.*

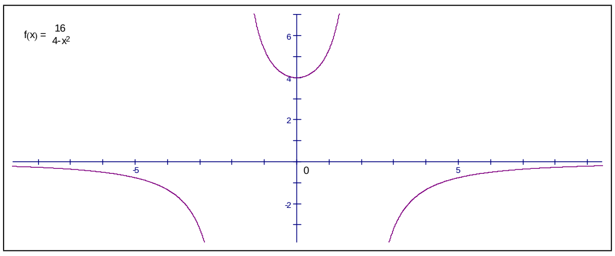
   Dobivamo skicu :



Zadatak 3.136. *Skicirajte grafove funkcija*

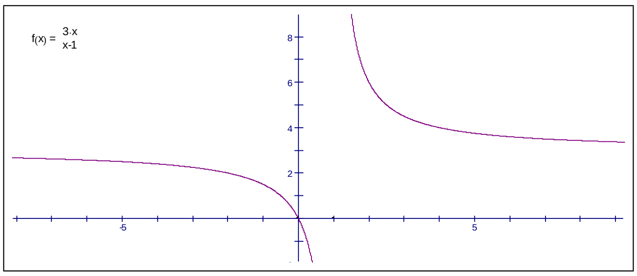
a) $f(x) = \frac{16}{4-x^2}$

Rj.



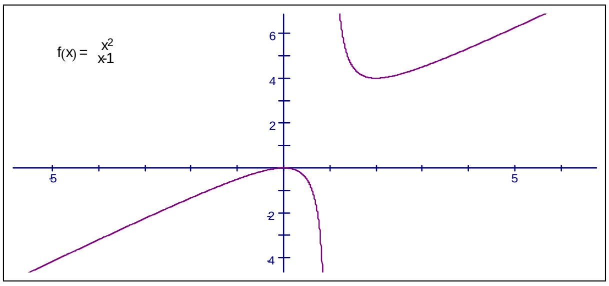
b) $f(x) = \frac{3x}{x-1}$

Rj.



c) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

Rj.



3.12 Zadaci za vježbu - gradivo funkcija

Ispit 3.1. *Riješite zadatke*

1. Zadana je funkcija
$$f\left(x\right)=\ln\left(\frac{x^2-25}{3+x}\right)$$
a) Odredite prirodno područje definicije funkcije.

   b) Odredite prvu derivaciju funkcije.

2. Zadana je funkcija prosječnih prihoda u ovisnosti o količini proizvodnje q
$$AR(q)=\frac{1}{4}q^4-3q^3+9q^2+50.$$
a) Ispitajte lokalne ekstreme i intervale rasta i pada funkcije AR(q).

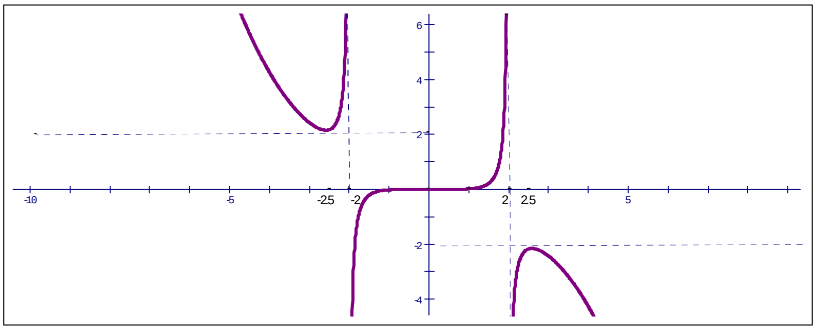
   b) Odredite funkciju ukupnih prihoda, te izračunajte koliko iznose ukupni prihodi na razini $q=2$.

3. Zadane su funkcije ukupnih prihoda $R(q)=15q^2+4q$ i funkcija ukupnih troškova $C(q)=5q^2-2q$, gdje q označava količinu proizvodnje.

   a) Odredite funkciju dobiti i izračunajte kolika je dobit na razini proizvodnje $q=3$.

   b) Odredite funkciju granične dobiti i interpretirajte rezultat na razini $q=2$.

4. Zadan je graf funkcije $f(x)$



a) Odredite: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

b) Odredite sve asimptote funkcije.

c) Odredite intervale rasta i pada funkcije.

d) Odredite lokalne ekstreme funkcije.

5. Odredite inverz funkcije $f(x) = \frac{6x+2}{3x-4}$.

6. Dana je funkcija ukupnih troškova $T(q) = \frac{4}{3}q^3 - 8q^2 + 2q + 20$.

a) izvedite funkciju graničnih troškova,

b) odredite intervale konkavnosti i konveksnosti funkcije ukupnih troškova.

Ispit 3.2. *Riješite zadatke*

1. *Zadana je funkcija*

$$f(x) = \sqrt{\frac{10-2x}{-x^2+64}}.$$

a) Odredite prirodno područje definicije funkcije.

b) Odredite prvu derivaciju funkcije.

2. Zadana je funkcija prosječnih prihoda u ovisnosti o količini proizvodnje q

$$AR(q) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{7}{4}x^4 + \frac{10}{3}x^3 + 2.$$

a) Ispitajte lokalne ekstreme i intervale rasta i pada funkcije AR(q).

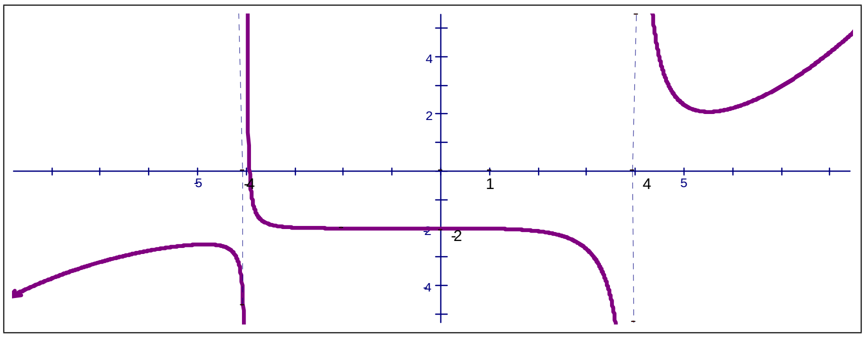
b) Odredite funkciju ukupnih prihoda, te izračunajte koliko iznose ukupni prihodi na razini $q = 2$.

3. Zadane su funkcije ukupnih prihoda $R(q) = 30q^2 + 20q$ i funkcija ukupnih troškova $C(q) = 5q^2 - 5q$, gdje q označava količinu proizvodnje.

   a) Odredite funkciju dobiti i izračunajte kolika je dobit na razini proizvodnje $q = 5$.

   b) Odredite funkciju granične dobiti i interpretirajte rezultat na razini $q = 2$.

4. Zadan je graf funkcije $f(x)$



   a) Odredite: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-4^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-4^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to4^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to4^+} f(x)$

   b) Odredite (ukoliko postoje) horizontalne i vertikalne asimptote funkcije.

5. Zadane su funkcije $f(x) = 3x^2 + 2x$ i $g(x) = 3x - 2$. Riješite jednadžbu $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$.

Ispit 3.3. *Riješite zadatke*

1. *Odredite područje definicije funkcije*

$$f(x) = \sqrt{\frac{-x^2 + 49}{4 - x}}.$$

1. Ispitivanjem odgovarajućih limesa odredite sve asimptote funkcije

$$f(x) = \frac{12x^2 + x}{6 - x}.$$

2. Ispitajte lokalne ekstreme i intervale rasta i pada funkcije

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 2.$$

3. Odredite prvu derivaciju funkcije

$$f(x) = \frac{\sin(10x)}{5x} + \ln^2(10x).$$

4. Zadana je funkcija prosječnih prihoda

$$AR(q) = 300q - 60.$$

a) Izračunajte funkciju ukupnih prihoda. Koliko iznose ukupni prihodi na razini $q = 2$?

b) Odredite funkciju graničnih prihoda te interpretirajte rezultat na razini $q = 3$.

5. Zadana je funkcija $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x + 100$. Izračunajte koeficijent elastičnosti funkcije f u odnosu na varijablu x za $x = 5$ i interpetirajte dobiveni rezultat.

Ispit 3.4. *Riješite zadatke*

1. Odredite područje definicije funkcije

$$f(x) = \log_3(x^2 - 3x - 4) + 4\sqrt{2 - x}.$$

2. Ispitivanjem odgovarajućih limesa odredite sve asimptote funkcije

$$f(x) = \frac{5 + 5x^2}{2 - x^2}.$$

3. Ispitajte lokalne ekstreme i intervale rasta i pada funkcije

$$f(x) = \frac{x - 2}{x^2 + 5}.$$

4. Odredite prvu derivaciju funkcije

$$f(x) = \sin^5(8x) + \ln(10x^2)\sqrt{x}.$$

5. Odredite područje konveksnosti i konkavnosti funkcije dane izrazom $f(x) = x^4 + x^2$.

6. Zadana je funkcija $f(x) = \frac{3x}{x^2+2}$. Izračunajte koeficijent elastičnosti funkcije f u odnosu na varijablu x za $x = 4$ i interpetirajte dobiveni rezultat.

Poglavlje 4

Dodatak I: primjerci ispitnih zadataka

Ispit 4.1. *Riješite zadatke*

1. *Zadana je funkcija $R(q)$ koja opisuje ukupan prihod poduzeća u ovisnosti o proizvedenim količinama q.*

$$R(q) = -\frac{2}{3}q^3 + 7q^2 - 12q + 10.$$

1. a) Odredite koiko iznose prihodi poduzeća na razini proizvodnje $q = 2$.

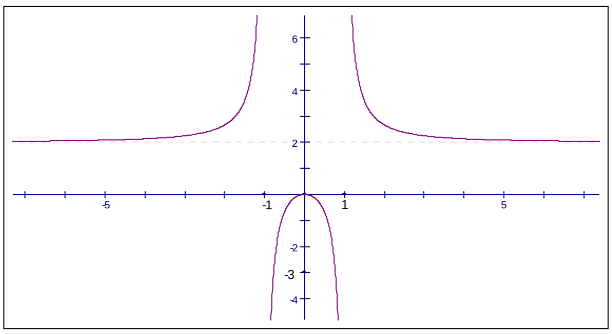
   b) Odredite intervale rasta i pada funkcije R te odredite maksimalni mogući prihod poduzeća.

   c) Odredite funkciju prosječnih prihoda.

2. Odredite područje definicije funkcije i nađite prvu derivaciju funkcije $f(x)$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x-5}{9-x^2}}$$

3. Zadan je graf funkcije $f(x)$



Odredite: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$.

b) Odredite sve asimptote funkcije.

4. Zadane su matrice, izračunajte inverz matrice $A \cdot B$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Poduzeće proizvodi tri proizvoda P_1, P_2 i P_3 od 3 vrste materijala M_1,M_2 i M_3 . Utrošak materijala po jedinici pojedinog proizvoda i raspoložive količine materijala dane su u tablici. Odredite koje količine proizvoda proizvesti kako bi se u potpunosti iskoristile raspoložive količine materijala.

	P_1	P_2	P_3	količine
M_1	2	1	0	30
M_2	0	1	3	55
M_3	1	1	1	45

Ispit 4.2. *Riješite zadatke*

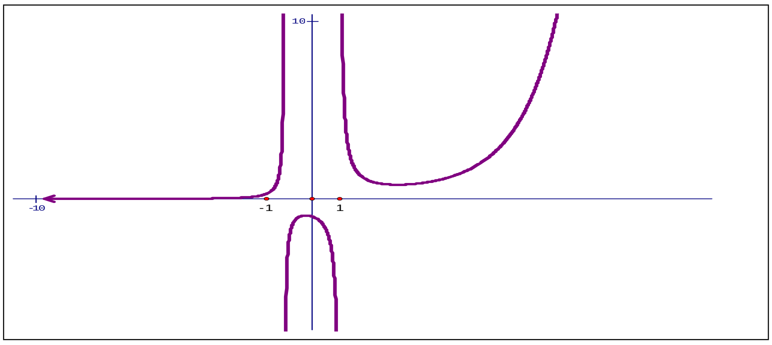
1. Zadana je funkcija
$$f(x) = \frac{1-x}{x^2+3}.$$
Odredite nul-točku funkcije $f(x)$.

Odredite intervale rasta i pada te lokalne ekstreme funkcije $f(x)$.

2. Odredite područje definicije funkcije $f_1(x)$ i nađite prvu derivaciju funkcije $f_2(x)$

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 5\ln(10-x) + 4\sqrt{121-x^2} \\ f_2(x) &= \sqrt{\cos(2x)\sin^2 x} \end{aligned}$$

3. Zadan je graf funkcije



Odredite: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$.

b) Odredite sve asimptote funkcije

c) Koliko nul-točaka ima ova funkcija?

d) Koliko lokalnih minimuma ima ova funkcija?

4. Zadane su matrice A i B . Izračunajte determinantu matrice $A \cdot B - I$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

5. Poduzeće proizvodi tri proizvoda P_1, P_2 i P_3 od 3 vrste materijala M_1,M_2 i M_3 . Utrošak materijala po jedinici pojedinog proizvoda i raspoložive količine materijala dane su u tablici. Odredite koje količine proizvoda proizvesti kako bi se u potpunosti iskoristile raspoložive količine materijala.

	P_1	P_2	P_3	količine
M_1	1	1	1	60
M_2	0	1	1	40
M_3	2	1	0	50

Ispit 4.3. *Riješite zadatke*

1. Zadana je funkcija $D(q)$ koja opisuje ukupan dobi ptoduzeća u ovisnosti o proizvedenim količinama q.

$$D(q) = -\frac{1}{3}q^3 + 25q.$$

a) Odredite koiko iznosi dobit poduzeća na razini proizvodnje $q = 4$.

b) Odredite intervale rasta i pada prihoda te odredite maksimalnu moguću dobit poduzeća.

2. Odredite područje definicije funkcije $f(x)$ i nađite prvu derivaciju funkcije

$$f_1(x) = \sqrt{\frac{10x - 5}{-x^2 + 16}}$$

3. Odredite sve asimptote funkcije

$$f(x) = \frac{10 - 6x^2}{x^2 - 4}$$

izračunavanjem odgovarajućih limesa..

4. Zadane su matrice A i B. Izračunajte inverz matrice $A \cdot B$.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

5. Riješite sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ -x - z &= -2 \\ y - 2z &= -2 \\ x + y - 2z &= -2 \end{aligned}$$

Ispit 4.4. *Riješite zadatke*

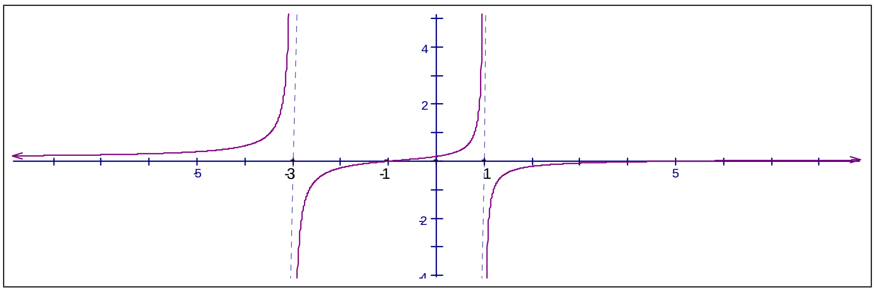
1. Odredite lokalne ekstreme i intervale monotonosti funkcije

$$f(x) = \frac{4}{5}x^5 - \frac{16}{3}x^3 + 10$$

2. Odredite područje definicije funkcije i prvu derivaciju funkcije

$$f(x) = \ln(2x - 9) + \sqrt{x^2 - 25}$$

3. Zadan je graf funkcije



a) Odredite: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-3^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-3^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$,. $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$.

b) Odredite sve asimptote funkcije, te odredite nul-točku funkcije.

c) Ima lli ova funkcija lokalnih ekstrema?

d) Odredite intervale monotonosti funkcije.

4. Riješite sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= -5 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 &= 4 \\ -x_1 + x_2 &= 7 \end{aligned}$$

5. Poduzeće XXX proizvodi tri proizvoda. Ako je u matrici q dana tjedna proizvodnja poduzeća (gdje je q_i količina i-tog proizvoda), u matrici c dani su jedinični troškovi proizvodnje i u matrici p prodajne cijena po jedinici proizvoda. Ako je $q = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}$ $c = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$ $p = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 6 \end{bmatrix}$, $e = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ izračunajte i interpretirajte umnoške:

a) $q^T p$
b) $q^T e$
c) $q^T(p - c)$.

Ispit 4.5. *Riješite zadatke*

1. Odredite lokalne ekstreme i intervale monotonosti funkcije

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 1.$$

2. Odredite područje definicije funkcije

$$f(x) = \log_5\left(\frac{x^2+8x+12}{1-x^2}\right)$$

te nađite prvu derivaciju funkcije.

3. Izračunavanjem odgovarajućih limesa odredite sve asimptote funkcije

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2-9}.$$

4. Riješite matričnu jednadžbu

$$X - B = XA + C$$

ako je $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$.

5. Izračunajte determinantu matrice $A \cdot B$, ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $.B =$
$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$.

Ispit 4.6. *Riješite zadatke*

1. Zadana je funkcija R(q) koja opisuje ukupan prihod poduzeća u ovisnosti o proizvedenim količinama q.

$$R(q) = -\frac{1}{3}q^3 + 81q.$$

a) Odredite koiko iznose prihodi poduzeća na razini proizvodnje $q = 5$.

b) Odredite intervale rasta i pada funkcije R te odredite maksimalni mogući prihod poduzeća.

2. Odredite područje definicije funkcije $f(x)$ i nađite prvu derivaciju funkcije

$$f_1(x) = \ln(x^2 - 25) - \sqrt{4x+8}$$

3. Odredite sve asimptote funkcije

$$f\left(x\right) = \frac{10 - 6x^2}{x^2}$$

izračunavanjem odgovarajućih limesa..

4. Zadane su matrice A i B. Izračunajte inverz matrice $A \cdot B + .C$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

5. Poduzeće proizvodi tri proizvoda P_1, P_2 i P_3 od 3 vrste materijala M_1,M_2 i M_3 . Utrošak materijala po jedinici pojedinog proizvoda i raspoložive količine materijala dane su u tablici. Odredite koje količine proizvoda proizvesti kako bi se u potpunosti iskoristile raspoložive količine materijala.

	P_1	P_2	P_3	količine
M_1	2	1	1	60
M_2	0	1	2	60
M_3	2	0	2	60

Ispit 4.7. *Riješite zadatke*

1. Zadana je funkcija $D(q)$ koja opisuje dobit poduzeća u ovisnosti o proizvedenim količinama q.

$$D(q) = \frac{2}{3}q^3 + 7q^2 + 12q + 200.$$

a) Odredite koiko iznosi dobit poduzeća na razini proizvodnje $q = 2$.

b) Odredite intervale rasta i pada funkcije D te odredite maksimalni moguću dobit poduzeća.

c) Odredite funkciju prosječne dobiti.

d) Odredite funkciju granične dobiti i interpretirajte rezultat na razini $q = 4$.

2. Odredite područje definicije funkcije i nađite prvu derivaciju funkcije $f(x)$

$$f(x) = \ln\left(\frac{7+x}{x^2-100}\right)$$

3. Odredite sve asimptote funkcije izračunavanjem odgovarajućih limesa

$$f\left(x\right) = \frac{15+x}{x-8}$$

4. Riješite sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= -10 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 10 \\ -3x_1 + x_2 &= 10 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 &= 20 \end{aligned}$$

5. Poduzeće XXX proizvodi tri proizvoda. Ako je u matrici q dana tjedna proizvodnja poduzeća (gdje je q_i količina i-tog proizvoda), u matrici c dani su jedinični troškovi proizvodnje i u matrici p prodajne cijena po jedinici proizvoda. Ako je $q = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$ $c = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ $p = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \\ 8 \end{bmatrix}$, $e = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ izračunajte i interpretirajte umnoške:

a) $q^T p$
b) $q^T e$
c) $q^T(p-c)$.

Ispit 4.8. *Riješite zadatke*

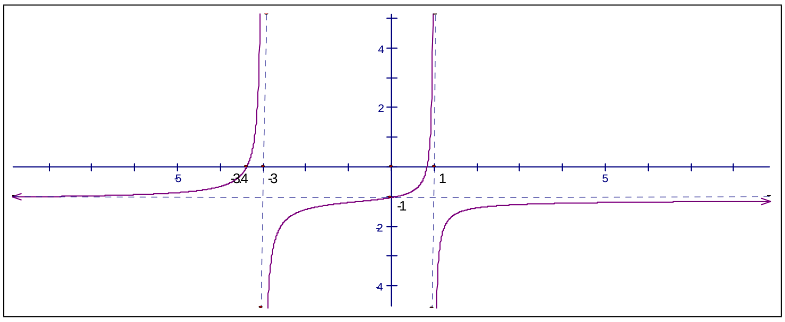
1. Odredite lokalne ekstreme i intervale monotonosti funkcije

$$f(x) = x^4 + 12x^3 + 36x^2.$$

2. Odredite područje definicije, te nađite prvu derivaciju funkcije

$$f(x) = \sqrt{\frac{-2-x}{x^2+5x-14}}.$$

3. Na temelju grafa funkcije



a) Odredite: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-3^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-3^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$.

b) Odredite vertikalnu i horizontalnu asimptotu (ako postoje).

c) Odredite intervale rasta i pada funkcije.

4. Riješite sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} 2x-2y+z &= 5\\ -x-y+z &= 3\\ x-3y+z &= 3\\ x-3y+2z &= 8 \end{aligned}$$

5. Izračunajte inverz matrice $A\cdot B-C$, ako je $A=\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 1 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}.B=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 3 & 3\end{bmatrix}$,

$$C=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 1 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

Ispit 4.9. *Riješite zadatke*

1. Odredite lokalne ekstreme i intervale monotonosti i intervale konveksnosti i konkavnosti funkcije

$$f(x)=-\frac{1}{2}x^4-\frac{4}{3}x^3+3x^2+5.$$

2. Izračunavanjem odgovarajućih limesa odredite sve asimptote funkcije

$$f(x)=\frac{-3x}{x^2-16}.$$

3. Riješite sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} 3x - z &= 0 \\ x + 3y &= 1 \\ 2x + y + 2z &= 8 \end{aligned}$$

4. Odredite inverz matrice $A \cdot B + C$, ako je $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$,

   $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

5. Funkcijom $p(x) = x^2 - 6x - 7$ opisan je prihod jednog poduzeća u ovisnosti o broju prodanih proizvoda x.

Zadatak 4.1. a) *Koliki je prihod ako se proda* 200 *proizvoda?*

b) *Odredite razinu proizvodnje uz koju je prihod poduzeća jednak* 0

c) *Odredite funkciju prosječnih prihoda.*

d) *Odredite funkciju graničnih prihoda*

Ispit 4.10. *Riješite zadatke*

1. Zadana je funkcija prosječnih prihoda u ovisnosti o broju prodanih proizvoda x. Odredite lokalne ekstreme i intervale monotonosti funkcije prosječnih prihoda.
$$f(x) = \frac{x^2 - 8}{x + 3}.$$

2. Odredite područje definicije funkcije i prvu derivaciju funkcije
$$f(x) = \sqrt{\frac{-x^2 + 1}{3x - 2}}$$

3. Izračunavanjem odgovarajućih limesa odredite sve asimptote funkcije
$$f(x) = \frac{4x^2 + 5}{4 - 2x}$$

4. Riješite matričnu jednadžbu
$$AX = X - B$$
ako je $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

5. Poduzeće proizvodi tri vrste proizvoda koji se obrađuju u tri pogona. Dnevni kapaciteti pogaona (u satima) su: 18 sati za pogon I, 11 sati za pogon II, 17 sati za pogon III. Vrijeme obrade pojedinog proizvoda u pojedinom pogonu dano je u tablici. Izračunajte koje količine proizvoda P_1, P_2 *i* P_3 kako bi se u potpunosti iskoristili kapaciteti pogona.

	Pogon I	Pogon II	Pogon III
P_1	1	1	2
P_2	1	1	0
P_3	1	0	1

Ispit 4.11. *Riješite zadatke*

1. Zadana je funkcija$R(q)$ koja opisuje ukupan prihod poduzeća u ovisnosti o proizvedenim količinama q.
$$R(q) = -\frac{2}{3}q^3 + 7q^2 - 12q + 50.$$
a) Odredite koiko iznose prihodi poduzeća na razini proizvodnje $q = 3$.

b) Odredite intervale rasta i pada funkcije R te odredite maksimalni mogući prihod poduzeća.

2. Odredite područje definicije funkcije i nađite prvu derivaciju funkcije $f(x)$
$$f(x) = \sqrt{-9 + x^2} + \ln(x + 7)$$

3. Odredite sve asimptote funkcije izračunavanjem odgovarajućih limesa
$$f(x) = \frac{1 + 2x}{-x - 4}$$

4. Zadane su matrice, izračunajte inverz matrice $A \cdot B$.
$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Riješite sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} x - y + z &= 5 \\ -x - 2y &= -5 \\ y + z &= 0 \\ 2x - 3y + z &= 10 \end{aligned}$$

6. Zadana je funkcija troškova $T(q) = 5q^4 + 8q$, gdje je q količina proizvodnje. Izračunajte koeficijent elastičnosti u odnosu na razinu proizvodnje $q = 5$ i interpretirajte rezultat.

Ispit 4.12. *Riješite zadatke*

1. Zadana je funkcija R(q) koja opisujedobit poduzeća u ovisnosti o proizvedenim količinama q.

$$D(q) = -\frac{4}{3}q^3 + 14q^2 - 24q + 100.$$

a) Odredite intervale rasta i pada funkcije D te odredite maksimalni moguću dobit poduzeća.

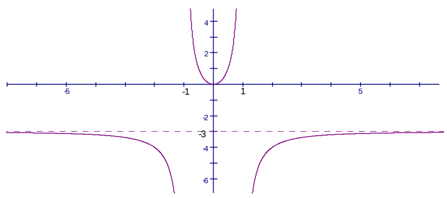
b) Odredite intervale konveksnosti ikonkavnosti funkcije dobiti.

c) Odredite funkciju prosječne dobiti.

2. Odredite područje definicije funkcije i nađite prvu derivaciju funkcije $f(x)$

$$f(x) = \ln\left(\frac{10 - x}{49 - x^2}\right)$$

3. Zadan je graf funkcije



a) Odredite: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$.

b) Odredite intervale monotonosti funkcije i lokalne ekstreme funkcije.

4. Riješite sustav jednadžbi

$$
\begin{aligned}
3x_1 - 4x_2 - x_3 &= -10 \\
x_1 + x_2 + 2x_3 &= 20 \\
-4x_1 + 2x_2 &= -20 \\
-2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0
\end{aligned}
$$

5. Poduzeće XXX proizvodi tri proizvoda. Ako je u matrici q dana tjedna proizvodnja poduzeća (gdje je q_i količina i-tog proizvoda), u matrici c dani su jedinični troškovi proizvodnje i u matrici p prodajne cijena po jedinici proizvoda.

   Ako je $q = \begin{bmatrix} 8 \\ 20 \\ 25 \end{bmatrix}$ $c = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ $p = \begin{bmatrix} 15 \\ 11 \\ 10 \end{bmatrix}$, $e = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ izračunajte i interpretirajte umnoške:

a) $q^T c$
b) $q^T e$
c) $q^T (p - c)$.

Poglavlje 5

Dodatak II: ponavljanje

U ovom odjeljku dan je pomoćni materijal koji služi za ponavljanje srednješkolskog gradiva iz matematike. Posebno, dana je kolekcija zadataka vezana uz gradivo skupova brojeva, te rješavanja jednadžbi i nejednadžbi.

.

5.1 Skupovi brojeva

Proučavat ćemo skupove: prirodnih, cijelih, racionalnih, iracionalnih te konačno realnih brojeva. Uvedimo oznake za skupove brojeva:

Skup prirodnih brojeva $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$
Skup cijelih brojeva $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$
Skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$
Skup svih iracionalnih brojeva $\mathbb{I}$
Skup svih realnih brojeva $\mathbb{R}$
Skup svih kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$

Vrijedi: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

Neka svojstva skupa prirodnih brojeva

(i) Ima najmanji element (broj 1), a svaki sljedeći element dobijemo tako da prethodnog uvećamo za 1.

(ii) Za svaki prirodan broj n, $n \neq 1$, postoji broj koji je njegov prethonik i to je $n - 1$.

(iii) Svaki prirodan broj n ima sljedbenika i to je $n + 1$.

(iv) Beskonačan je i prebrojiv.

Primjer 5.1. *Primijetimo*

1. $2 + 4 = 6$ *(zbroj dva prirodna broja je prirodan broj)*
2. $2 - 4 = -2$ *(razlika dva prirodna broja ne mora biti prirodan broj)*

Neka svojstva skupa cijelih brojeva

(i) Skup $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ čine pozitivni brojevi: $1, 2, 3, 4, ...$

i negativni brojevi: $-1, -2, -3, ...$ i broj 0.

(ii) Skup cijelih brojeva nema ni najmanji ni najveći element, a za svaki element skupa $\mathbb{Z}$ postoji pripadajući suprotan element. Dva su broja suprotna ako im je zbroj 0. Primjer takvih su brojevi -3 i 3.

(iii) Bekonačan je i prebrojiv.

Primjer 5.2. *Izračunajmo vrijednost izraza* $2(x-1)-[4(x+y)-(x-y)+1]$ *ako je* $x = 1$, $y = -1$.

Umjesto x i y uvrstit ćemo njihove pripadajuće vrijednosti.

$2(1-1) - [4(1-1) - (1-(-1)) + 1] = 0 - [0 - 2 + 1] = 1.$

Primjer 5.3. *Primijetimo*

1. $2 * 4 = 8$ *(umnožak dva cijela broja je cijeli broj)*
2. $2/4 = 1/2$ *(kvocijent dvaju cijelih brojeva ne mora biti cijeli broj).*

Neka svojstva skupa racionalnih brojeva

Brojevi koje možemo zapisati u obliku razlomka čine skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$. Ovdje m zovemo brojnikom, a n nazivnikom razlomka $\frac{m}{n}$.

(i) Skup $\mathbb{Q}$ je beskonačan i prebrojiv.

(ii) Zbrajanje/oduzimanje: $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm bc}{bd}$

(iii) Množenje razlomaka: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

(iii) Kvocijent razlomaka:$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$

(iv) Dvojni razlomak $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

(v) Mješoviti broj $a\frac{b}{c} = \frac{a \cdot c + b}{c}$

(v) Razlomak proširujemo tako da mu i brojnik i nazivnik pomnožimo istim cijelim brojem različitim od nule.

(vi) Razlomak kratimo tako da mu i brojnik i nazivnik podijelimo istim cijelim brojem različitim od nule.

(vii) Dva su racionalna broja međusobno recipročna ako im je umnožak 1.

Primjer 5.4. *Zbrajanje i oduzimanje razlomaka*

a) $\frac{1}{2} - (1 + \frac{1}{3}) = \frac{1}{2} - \frac{3+1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{4}{3} = \frac{3-8}{6} = -\frac{5}{6}$

b) $(\frac{8}{3} - (\frac{3}{2} + \frac{1}{6})) - (\frac{11}{3} - 2) = \frac{8}{3} - \frac{10}{6} - \frac{5}{3} = -\frac{2}{3}$

c) $\frac{3}{7} + 4 - (\frac{1}{4} - \frac{1}{7} - (\frac{3}{7} - 5) - 1) = \frac{3}{4}$

d) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - (\frac{1}{6} + \frac{5}{12}) = \frac{1}{2}$

e) $2\frac{1}{3} + 1\frac{3}{2} = \frac{7}{3} + \frac{5}{2} = \frac{29}{6}$

f) $\frac{1}{4} - 3\frac{1}{8} + 2\frac{3}{16} = -\frac{11}{16}$

g) $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} + \frac{1}{6} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} + \frac{1}{6} = 1.$

Primjer 5.5. *Množenje i dijeljenje razlomaka*

a) $\frac{1}{2} \cdot 3 - \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5} + \frac{2}{15} \cdot \frac{5}{4} = \frac{3}{2} - \frac{4}{5} + \frac{1}{6} = \frac{13}{15}$

b) $\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{7} - \frac{1}{2}(\frac{1}{7} + \frac{1}{2}) = -\frac{3}{28}$

c) $\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{2} + 1\frac{4}{5} = \frac{23}{10}$

d) $\frac{3}{2} : \frac{9}{8} = \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{9} = \frac{4}{3}$

e) $\frac{2}{3} : \frac{5}{6} - \frac{1}{2}(0.6 - \frac{3}{5} : \frac{1}{6}) = \frac{23}{10}$

f) $\frac{2}{3} : \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(\frac{12}{10} - \frac{5}{3}) = \frac{61}{90}$.

Zadatak 5.1. *Operacije sa razlomcima*

a) $\frac{1}{2} - 2(\frac{1}{3} : 2 - 8 \cdot \frac{1}{3})$ $(Rj. : : \frac{11}{2})$

b) $\frac{2}{3}(1 - \frac{3}{2}) + \frac{1}{6}(\frac{3}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2})$ $(Rj. : : -\frac{1}{9})$

c) $\frac{4}{5} - 0.75 + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} - \frac{14}{5}$ $(Rj. : -\frac{251}{100})$

d) $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} + 2\frac{3}{4} - 3\frac{7}{2}$ $(Rj. : -\frac{59}{20})$

e) $\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} - \frac{1}{3} : 2$ $(Rj. : \frac{1}{2})$.

Skup iracionalnih brojeva

Brojeve koji se ne mogu prikazati u obliku razlomka kojem su i brojnik i nazivnik cijeli brojevi nazivamo iracionalnim brojevima i čine skup iracionalnih brojeva, a označavamo s $\mathbb{I}$.

Iracionalnih brojeva ima neprebrojivo mnogo. Neki od iracionalnih brojeva su: π, e, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$.

Neka svojstva skupa realnih brojeva

Skup realnih brojeva sadrži sve racionalne i iracionalne brojeve.

Ponekad je od interesa proučavati podskupove S skupa realnih brojeva i to takve da za a i b realne brojeve , $a < b$, promatramo sve realne brojeve x koji se nalaze "između" a i b, tj za vrijedi $a < x < b$. Takve podskupove nazivamo intervalima i označavamo $S = < a, b >$. Razlikujemo otvorene, zatvorene i poluotvorene intervale.

Primjer 5.6. *Intervali u* $\mathbb{R}$:

a) Skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ možemo zapisati kao interval $< -\infty, +\infty >$

b) Otvoreni interval $< a, b >= \{x : a < x < b\}$

c) Lijevi poluotvoreni interval $< a, b] = \{x : a < x \leq b\}$

d) Desni poluotvoreni interval $[a, b >= \{x : a \leq x < b\}$

e) Zatvoreni interval (segment) $[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$

Primjer 5.7. *Zapisi nekih intervala*

a) $\langle 1, 7\rangle = \{x : x > 1 \quad \& \quad x < 7\} = \{x : 1 < x < 7\}$

b) $\langle -\infty, 5\rangle = \{x : x < 5\}$

c) $\langle -7, +\infty\rangle = \{x : x > -7\}$.

Primjer 5.8. *Operacije s intervalima*

a) $\langle 1, 5\rangle \cap \langle 3, 4] = \langle 3, 4]$

b) $[2, 7] \cap [3, 10\rangle = [3, 7]$

c) $\langle -6, 2\rangle \cup \langle -5, 3\rangle = \langle -6, 3\rangle$

d) $[-5, 5] \cap [-3, 6] = [-3, 6]$

e) $(\langle -1, 5\rangle \cup \langle 7, 10\rangle) \cap [2, 9\rangle = [2, 5\rangle \cup \langle 7, 9\rangle$

f) $([-3, 3] \cup \langle 6, 7]) \cap [1, 2] = [1, 2]$

g) $(\langle 1, 3\rangle \cup \langle 5, 8]) \cap \langle 2, 7\rangle = \langle 2, 3\rangle \cup \langle 5, 7\rangle$

h) $[1, 7] \backslash [2, 3] = [1, 2\rangle \cup \langle 3, 7]$.

5.1.1 Ponavljanje: potencije

Za početak, ponovimo osnovna pravila potenciranja

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n-puta}$$

gdje a zovemo bazom, a n eksponentom. Vrijede pravila:

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
2. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
3. $a^{-1} = \frac{1}{a}$
4. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
5. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
6. $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n} = a^n \cdot b^{-n}$
7. $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$
8. $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$
9. $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
10. $a^0 = 1$
11. $a^1 = a$
12. $(-1)^{parno} = 1$, $(-1)^{neparno} = -1$.

Primjer 5.9. *Potencije*

a) $(2^3)^2 \cdot 3^5 \cdot 3^1 = 2^6 \cdot 3^6 = 6^6$

b) $(a^2 + a + 3)(a^3 + a^2) = a^5 + a^4 + a^4 + a^3 + 3a^3 + 3a^2 = a^5 + 2a^4 + 4a^3 + 3a^2$

c) $(a^{n-1})^2 \cdot (a^n)^2 \cdot (a^{3-n}) \div a^{4n}a^{-6}a^{3-n} = a^{3n+1} \div a^{3n-3} = a^4$

d) $\frac{a^{12} \cdot a^{-9}}{a^{13}} - \frac{4}{a^{--10}} = -3a^{-10}$

e) $\sqrt[4]{a^{5n}} \div \sqrt[6]{a^{2n}} = a^{\frac{5n}{4}} \div a^{\frac{2n}{6}} = a^{\frac{15n-4n}{12}} = a^{\frac{11n}{12}}$

f) $\frac{2\cdot(\frac{1}{2})^{-3}-5^2\cdot(25)^{-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{9}}{\sqrt[3]{8}-1}=1$

e) $(-1)^4 3^3-(-1)^{102}2^3+(-1)^{111}5^3=-106.$

Neke važne formule

Kvadrat zbroja	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
Kvadrat razlike	$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
Razlika kvadrata	$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
Kub zbroja	$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
Kub razlike	$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
Razlika kubova	$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
Zbroj kubova	$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

Primjer 5.10. *Korištenje gornjih formula*

a) $(x^2-4)=(x^2-2^2)=(x-2)(x+2)$

b) $x^3+27=x+3^3=(x+3)(x^2-3x+9)$

c) $\frac{x^2-25}{x+5}=\frac{(x-5)(x+5)}{x+5}=x-5$

d) $\frac{x^3-16x}{x-4}=\frac{x(x^2-16)}{x-4}=\frac{x(x-4)(x+4)}{x-4}=x(x+4)$

e) $\frac{1}{x}\cdot\frac{x^3-1}{x^2-2x+1}=\frac{1}{x}\cdot\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)^2}=\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2+x+1}{x-1}=\frac{x^2+x+1}{x^2-x}.$

Primjer 5.11. *Racionalizacija*

a) $\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{a}$

b) $\frac{1}{\sqrt{x-2}}=\frac{1}{\sqrt{x-2}}\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}}=\frac{\sqrt{x-2}}{x-2}$

c) $\frac{3}{\sqrt{x}-1}=\frac{3}{\sqrt{x}-1}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\frac{3(\sqrt{x}+1)}{x-1}$

d) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-+2}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-+2}\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2}=\frac{x-2\sqrt{x}}{x-4}.$

5.1.2 Rješavanje jednadžbi

Linearne jednadžbe

Linearne jednadžbe $ax+b=0$ rješavamo tako da nepoznanicu x stavljamo na lijevu stranu, a slobodni član na desnu te jednostavnim operacijama dolazimo do x.

Primjer 5.12. *Rješavanje linearnih jednadžbi*

$$\begin{aligned} 2x-4 &= 5x+2 \\ 2x-5x &= 2+4 \\ -3x &= 6 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Zadatak 5.2. *Riješite jednadžbe*

a) $2x+5=-3+x$ $(Rj.: x=-8)$

b) $-x-1=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}(x+2)$ $(Rj.: x=-\frac{5}{4})$

c) $\frac{x+5}{2}-\frac{x-1}{3}=\frac{-x+4}{6}+\frac{1}{2}$ $(Rj.: x=-5)$

d) $x+1=x-1$ (Nema rješenja)

e) $2x+4=-4+2x+8$ $(Rj.: x\in\mathbb{R})$

f) $5-(x-7)+3x=4-(2-x)$ $(Rj.: X=-10)$

g) $2x-3(2x-(4-x)+1)=10+x-(1-x)$ $(Rj.: x=0)$

h) $\frac{x}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x=\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}$ $(Rj.: x=\frac{4}{9})$

i) $(x-1)(x-7)=(x-3)(x+4)$ $(Rj.: x=\frac{19}{9})$

j) $\frac{(5x-1)}{2}=\frac{-(7x-3)}{3}$ $(Rj.: x=\frac{9}{29})$.

Problemski zadaci

Zadatak 5.3. *U srpnju 2009. Zadar je posjetilo 58170 gostiju, od toga je domaćih bilo za 42716 manje od stranih. Odredite broj stranih i broj domaćih gostiju.*

Rješenje.

$x =$ *broj domaćih gostiju*
$x + 42716 =$ *broj stranih gostiju*
Ukupan broj gostiju: $x + x + 42716 = 58170$
$2x = 58170 - 42716 = 15\,454$
$x = 7727$ *broj domaćih*
Broj stranih $=7727+42716 = 50\,443$

Zadatak 5.4. *Cijena neke robe prije poskupljenja bila je* 500 *kn. Ako je poskupila za* 10%, *odredite novu cijenu.*

Rješenje.

y=*nova cijena*
$y = 500 + 500\frac{10}{100} = 550.$

Općenito:
x=stara, y =nova cijena, $p\%$ =poskupljenje $\Longrightarrow y = x + x\frac{p}{100}$
ako se radi o pojeftinjenju proizvoda (pad cijene) $\Longrightarrow y = x - x\frac{p}{100}$

Zadatak 5.5. *Cijena neke robe nakon poskupljenja od* 10% *iznosi* 500*kn. Kolika je bila cijena prije poskupljenja?*

Rješenje.

$y = 500$, $p = 10$
$x =?$
$y = x + x\frac{p}{100}$
$500 = x + x\frac{10}{100}$
$500 = x(1 + \frac{10}{100})$
$500 = x\frac{110}{100} \quad \backslash \cdot \frac{100}{110}$
$x = 454.54$

Zadatak 5.6. *U srpnju je cijena auta tipa A iznosila 90 000 kn. U kolovozu mu je cijena pala za* 5%, *a u rujnu je pala za* 15%. *Kolika je konačna cijena auta nakon ove dvije promjene?*

Rješenje.

$x = 90000$

Imamo dvije promjene $p_1 = 5, p_2 = 15.$

Cijena nakon prve promjene $y_1 = x - x\frac{p_1}{100}$

$$y_1 = 90000 - 90000 \cdot \frac{5}{100} = 85\,500$$

Cijena nakon druge promjene $y_2 = y_1 - y_1\frac{p_2}{100}$

$$y_2 = 85500 - 85500 \cdot \frac{15}{100} = 72\,675$$

Zadnja cijena auta je $72\,675$ *kn.*

Zadatak 5.7. *Za koliko se posto povećalo davanje trgovine A državi nakon što je PDV sa* 22% *porastao na* 23%?

Rješenje.

Tražimo promjenu u postocima $= \frac{23-22}{22} = 0.0454545 = 4.54\%$

Zadatak 5.8. *Cijena nekog proizvoda mijenjala se dva puta. Prije promjene iznosila je* 450 *kn. Prvo se cijena povećala za* 50%, *a zatim se smanjila za* 35%. *Odredite cijenu nakon ovih promjena i izrazite promjenu u kunama i u postocima.*

Rješenje.

$x = 450$, *povećanje* $p_1 = 50$, *smanjenje* $p_2 = 35\%$

Prva promjena $y_1 = 450 + 450 \cdot \frac{50}{100} = 675$

Druga promjena $y_2 = 675 - 675 \cdot \frac{35}{100} = 438.\,75$

Cijena nakon promjena iznosi $438.\,75$ *kn.*

Promjena u kunama (nova cijena- stara cijena) $= 438.75 - 450 = -11.$
25

Promjena u postocima: $\frac{nova-stara}{stara} = \frac{438.\,75-450}{450} = -0.025 = -2.5\%$

Ukupno se cijena smanjila za 11.25 *kn, tj. smanjila se za* 2.5%.

Zadatak 5.9. *Cijena nekog proizvoda mijenjala se dva puta. Prvo se povećala za* 35%, *nakon toga je pala za* 20%. *Na koncu je iznosila* 1700 *kn. Kolika je bila prvotna cijena?*

Rješenje.

$x =$*prvotna cijena.*

$y = 1700$ *konačna cijena*

$p_1 = 35\%$

$p_2 = -20\%$

Kako imamo podatak o konačnoj cijeni, računamo unatrag (od zadnje promjene cijene)

$1700 = x_2 - x_2\frac{20}{100}$

$1700 = x_2\frac{80}{100}$
$x_2 = 1700 \cdot \frac{100}{80} = 2125$ *to je cijena prije smanjenja cijene za* 20%
$2125 = x_1 + x_1\frac{35}{100}$
$x_1 = 2125 \cdot \frac{100}{135} = 1574.07$

Kvadratne jednadžbe

Kvadratna jednadžba je jednadžba oblika $ax^2 + bx + c = 0$. Može imati dva različita realna rješenja (kada je $b^2 - 4ac > 0$), jedno realno rješenje (kada je $b^2 - 4ac = 0$) i nema realnih rješenja (kada je $b^2 - 4ac < 0$). Naći rješenje kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$ je isto što i naći nul-točke polinoma $p(x) = ax^2 + bx + c$. Rješenja dobivamo formulom:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Primjer 5.13. *Primjeri rješavanja kvadratnih jednadžbi*

a) $2x^2 = 10x - 8$

Jednadžbu prvo moramo svesti na standardni oblik da bismo mogli odrediti a, b, c.

$$2x^2 - 10x + 8 = 0$$

Sada vidimo $a = 2$, $b = -10, c = 8$

$$x_{1,2} = \frac{-(-10)\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot 2\cdot 8}}{2\cdot 2} = \frac{10\pm\sqrt{100-64}}{4} = \frac{10\pm 6}{4}$$

$$x_1 = \frac{10+6}{4} = 4, \qquad x_2 = \frac{10-6}{4} = 1$$

Kvadratna jednadžba ima dva rješenja, tj. skup rješenja $\{1, 4\}$ je dvočlani skup.

b) $x^2 + x + 5 = 0$

$$a = 1,\ b = 1,\ c = 5$$

$$x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1-20}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{-19}}{2}$$

Kako $\sqrt{-19}$ nije realan broj, ova kvadratna jednadžba nema realnih rješenja.

c) $-25 = x^2 - 10x$

$$-x^2 + 10x - 25 = 0$$

$$a = -1,\ b = 10,\ c = -25$$

$$x_{1,2} = \frac{-10\pm\sqrt{10^2-4\cdot(-1)\cdot(-25)}}{2\cdot(-1)} = \frac{10\pm\sqrt{100-100}}{-2} = \frac{10\pm 0}{-2} = -5$$

Kvadratna jednadžba ima jedno realno rješanje $x = 5$.

Zadatak 5.10. *Riješite kvadratne jednadžbe*

a) $2x^2 + 7x - 15 = 0$ $\quad(Rj. : \{-5, \frac{3}{2}\})$

b) $x^2 - 3x - 28 = 0$ $\quad(Rj. : \{-4, 7\})$

c) $3x^2 - x + 6 = 0$ $\quad(nema\ rje\check{s}enja)$

d) $x^2 - 6x + 9 = 0$ $\quad(Rj. : \{3\})$.

Rješavanje jednadžbi s polinomima trećeg stupnja

Za rješavanje jednadžbi s polinomima trećeg stupnja, tj. jednadžbi tipa $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ nemamo formulu kao u slučaju sa kvadratnim jednadžbama i općenito ih je teže rješavati. Ipak, znamo kako krenuti. U slučaju da jednadžba ima cjelobrojna rješenja, ta su rješenja djelitelji slobodnog člana d, pa će naš prvi korak traženja nul-točki biti traženje nul-točki među djeliteljima slobodnog člana. U slučaju da nul-točku x_1 nađemo, traženje nastavljamo tako da podijelimo polinom $ax^3 + bx^2 + cx + d$ sa $(x - x_1)$ te daljnje nul-točke tražimo u dobivenom polinomu.

Prije nego krenemo rješavati jednadžbe trećeg stupnja, ponovimo kako dijeliti polinome.

Primjer 5.14. *Dijeljenje polinoma*

a) $(2x^3 - x^2 - 13x - 6) : (2x + 1) = x^2 - x - 6$

$$_{-}2x^3 +_{-} x^2$$
$$-2x^2 - 13x - 6$$
$$-_{+}2x^2 -_{+} x$$
$$-12x - 6$$
$$-_{+}12 -_{+} 6$$
$$0$$

Možemo zapisati $2x^3 - x^2 - 13x - 6 = (2x + 1)(x^2 - x - 6)$

b) $(x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6) : (x^2 - 2x - 3) = x^2 + x - 2$

$$_{-}x^4 -_{+} 2x^3 -_{+} 3x^2$$
$$x^3 - 4x^2 + x + 6$$

$$\begin{array}{l} {}_{-}x^3 -_{+} 2x^2 -_{+} 3x \\ \qquad -2x^2 + 4x + 6 \\ -_{+}2x^2 +_{-} 4x +_{-} 6 \\ \qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

c) $(x^2 + 4x + 2) : (x + 2) = x + 2$

$$\begin{array}{l} {}_{-}x^2 +_{-} 2x \\ \qquad 2x + 2 \\ \qquad {}_{-}2x +_{-} 4 \\ \qquad\quad -2 \end{array}$$

U ovom slučaju ova dva polinoma nisu djeljiva, ostatak je -2,

tj. $x^2 + 4x + 2 = (x + 2)(x + 2) - 2$.

Vratimo se sada na traženje nul-točaka polinoma trećeg stupnja.

Primjer 5.15. *Nađite nul-točke polinoma*

a) $p(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

b) $p(x) = x^3 + 6x^2 - 7x$

Rješenje.

a) Rješavamo jednadžbu $x^3+3x^2-4x-12 = 0$. Prvu nul-točku tražimo među djeliteljima broja 12, a to su brojevi $1, -1, 2, .2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 12, -12$.

$1 : \quad 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 12 = -12$
$-1 : \quad (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) - 12 : -6$
$2 : \quad 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 - 12 : 0.$

Našli smo prvu nul-točku: $x = 2$. Sada polinom dijelimo sa $(x - 2)$.
$x^3 + 3x^2 - 4x - 12 : (x - 2) = x^2 + 5x + 6$

$$\begin{array}{l} {}_{-}x^3 -_{+} 2x^2 \\ \quad 5x^2 - 4x - 12 \\ \quad {}_{-}5x^2 -_{+} 10x \\ \qquad 6x - 12 \\ \qquad {}_{-}6x -_{+} 12 \\ \qquad\quad 0. \end{array}$$

Daljnje nul-točke su nul-točke polinoma $x^2 + 5x + 6$.
$x_{1,2} = \frac{-5\pm\sqrt{25-24}}{2} = \frac{-5\pm1}{2}$
$x_1 = -3 \qquad x_2 = -2$

b) Rješavamo jednadžbu $x^3 + 6x^2 - 7x = 0$.
Vidimo da možemo izlučiti x jer nemamo slobodnog člana.
$x(x^2 + 6x - 7) = 0$
$x = 0$
$x^2 + 6x - 7 = 0$.
Rješavanjem kvadratne jednadžbe dobivamo $x_1 = 1$, $x = -7$.
Našli smo tri nul-točke $\{-7, 0, 1\}$.

Zadatak 5.11. *Riješite jednadžbe*

a) $2x^3 + 11x^2 + 4x - 5 = 0$ $\quad (Rj. : \{\frac{1}{2}, -5, -1\})$

b) $x^3 + 2x^2 - 8x = 0$ $\quad (Rj. : \{-4, 0, 2\})$

c) $9x^3 + 39x^2 + 10x - 8 = 0$ $\quad (Rj. : \{-4, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\})$

d) $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$ $\quad (Rj. : \{-2, 0, 1\})$.

5.1.3 Rješavanje nejednadžbi

Linearne nejednadžbe

Kao pri rješavanju linearnih jednadžbi, pri rješavanju linearnih nejednadžbi nepoznanicu stavljamo na lijevu stranu, a poznanice na desnu. Pritom je potrebno paziti da se dijeljenjem (množenjem) negativnim brojem znak nejednakosti okreće. Dajemo par primjera.

Primjer 5.16. *Riješite nejednadžbe*

a) $2x - 3 \leq x - 6$ $\quad (Rj. : x \leq -3)$

b) $4 > 3x - 1$ $\quad (Rj. : x < \frac{5}{3})$

c) $2 - x \geq 1 - x + 5$ $\quad$ (*nema rješenja*)

d) $3 + 2x < 14 + 2x$ $\quad (Rj. : x \in \mathbb{R})$.

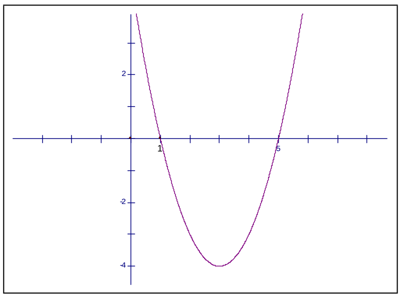
Kvadratne nejednadžbe

Za rješavanje kvadratnih nejednadžbi potrebno je znati nešto o izgledu polinoma drugog stupnja.

Neka nam je dan polinom drugug stupnja $ax^2 + bx + c$. Njegov graf je parabola koja siječe $x - os$ u jednoj, dvije ili nijednoj točki (što smo već objašnjavali kod broja nul-točaka). Parabola može otvorom biti okrenuta prema gore ($a > 0$) ili prema dolje ($a < 0$). Pogledajmo na primjeru grafove nekih polinoma drugog stupnja

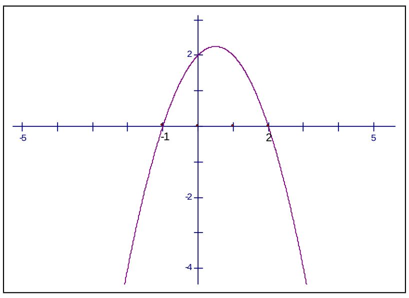
Primjer 5.17.

a) $x^2 - 6x + 5$

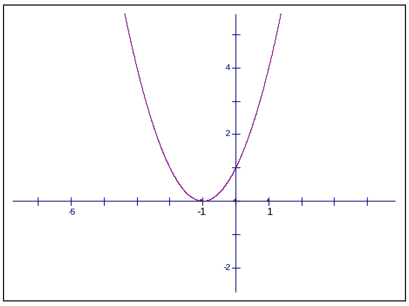


Primjetimo da su $1, 5$ *nul-točke ovog polinoma, tj. njih bismo dobili kao rješenje jednadžbe* $x^2 - 6x + 5 = 0$.

b) $-x^2 - 6x + 7$

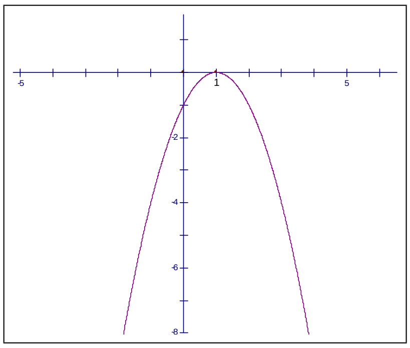


c) $x^2 + 2x + 1$

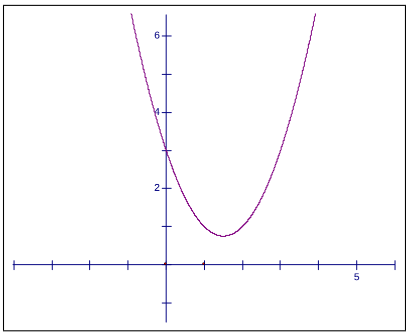


Ovaj polinom ima samo jednu nul-točku (-1)*. Nju bismo dobili kao rješenje jednadžbe* $x^2 + 2x + 1 = 0$*.*

d) $-x^2 + 2x - 1$

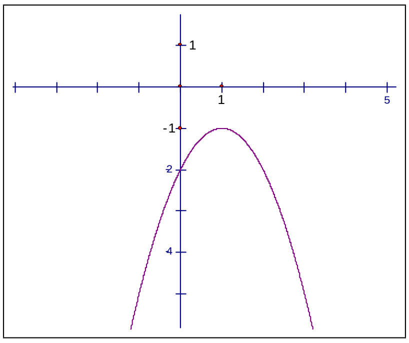


e) $x^2 - 3x + 3$



Ovaj polinom nema nul- točaka, tj. jednadžba $x^2 - 3x + 3 = 0$ *nema rješenja.*

f) $-x^2 + 2x - 2$

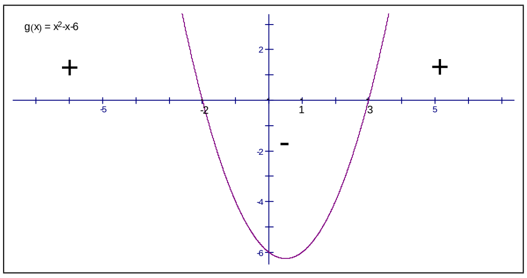


Ovaj polinom nema nul-točaka, tj. jednadžba $-x^2 + 2x - 2 = 0$ *nema rješenja.*

Primjer 5.18. *Na ovom primjeru pokazat ćemo kako se rješavaju kvadratne nejednadžbe. Rješavamo nejednadžbu* $x^2 - x - 6 > 0$.

Nejednadžbu rješavamo grafički. Potrebno je skicirati parabolu $x^2 - x - 6$. *U tu svrhu tražimo nul-točke.*

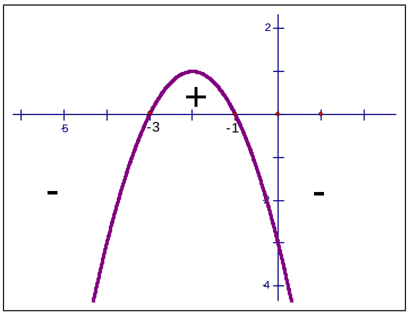
$x^2 - x - 6 = 0$ $\quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = -2$. *Budući da je* $a = 1 > 0$ *Parabola ima otvor prema gore.*



Sada je iz grafa moguće očitati rješenje nejednadžbe. U ovom primjeru se traži područje gdje kvadratna funkcija $x^2 - x - 6$ *postiže pozitivne vrijednosti, tako na grafu tražimo dio parabole koji se nalazi iznad* $x - osi$. *Dobivamo rješenje:* $x \in \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 3, +\infty\rangle$.

Zadatak 5.12. *Riješite nejednadžbu* $-x^2 - 4x - 3 \geq 0$.

Rješenje.
Tražimo nul-točke: $-x^2 - 4x - 3 = 0$
$\Longrightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{-2} = \frac{4 \pm 2}{-2} \Longrightarrow x_1 = -3,\ x_2 = -1$
Kako je $a = -1 < 0$ *otvor parabole je okrenut prema dolje.*

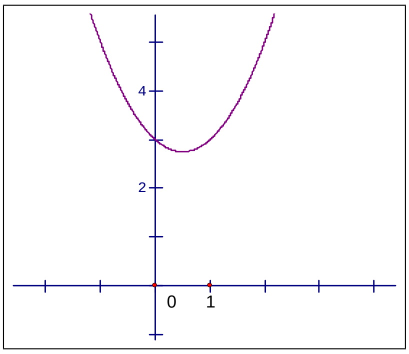


Rješenje: $x \in [-3, -1]$.

Zadatak 5.13. *Riješite nejednadžbu* $x^2 - x + 3 < 0$.

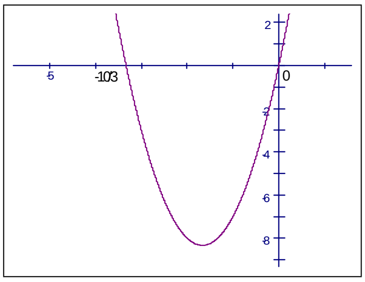
Tražimo nul-točke $x^2 - x + 3 = 0 \Longrightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-12}}{2}$ *jednadžba nema rješenja pa polinom* $x^2 - x + 3$ *postiže ili samo pozitivne ili samo negativne vrijednosti.. To možemo odrediti pomoću koeficijenta* a*. Ako je* $a < 0$*, postiže samo negativne vrijednosti (parabola je ispod* $x-$ *osi), u suprotnom, ako je* $a > 0$*, uvijek pozitivne (parabola je iznad* $x-$*osi). Ovdje je* $a = 1 > 0$*. Dakle,* $x^2 - x + 3$ *postiže samo pozitivne vrijednosti pa nejednadžba* $x^2 - x + 3 < 0$ *nema rješenja.*

Prikažimo i graf kvadratne funkcije $p(x) = x^2 - x + 3:$



Zadatak 5.14. *Riješite nejednadžbu* $3x^2 + 10x < 0$.

Rješenje.
$3x^2 + 10x = 0 \Longrightarrow x(3x + 10) = 0 \Longrightarrow x_1 = 0, x_2 = -\frac{10}{3}$
$a = 3 > 0$



Rješenje $x \in \langle -\frac{10}{3}, 0\rangle$.

Zadatak 5.15. *Riješite nejednadžbe:*

a) $x^2 - x - 30 \geq 0$ $(Rj.: x \in \langle -\infty, -5 \cup 6, \infty\rangle)$.

b) $(-x+9)(x-1) < 0$ $(Rj.: x \in \langle -\infty, 1\rangle \cup \langle 9, \infty\rangle)$.

c) $-x^2 - x - 6 < 0$ $(Rj.: x \in \mathbb{R})$.

d) $2x^2 - 11x + 12 \leq 0$ $(Rj.: x \in \left[\frac{3}{2}, 4\right])$.

e) $x^2 - 6x \leq 7$ $(Rj.: [-1, 7])$.

f) $x^2 \leq 64$ $(Rj.: [-8, 8])$.

g) $x^2 + 7 \leq 5$ $(Rj.: \textit{nema realnih rješenja})$.

h) $x^2 > 64$ $(Rj.: x \in \langle -\infty, -8\rangle \cup \langle 8, \infty\rangle)$.

i) $(x+10)(x-7) > 0$ $(Rj.: x \in \langle -\infty, -10\rangle \cup \langle 7, \infty\rangle)$.

j) $x^2 + 2x + 20 > 0$ $(Rj.: x \in \mathbb{R})$.

Bibliografija

[1] Šorić, K. (2011) Zbirka zadataka s primjenom u ekonomiji, 4.izdanje, Element, Zagreb.

[2] Lukač. Z. (2014) Matematika za ekonomske analize, 1.izdanje, Element, Zagreb.

[3] Babić, Z., Tomić Plazibat, N. (2003) Poslovna matematika. Ekonomski fakultet Split, Split.

[4] Babić Z.,Tomić N., Aljinović Z. (2004) Matematika za ekonomiste , Ekonomski fakultet Split..

[5] Harshbarger R.J., Reynolds J.J.(2004) Mathematical Applications for the management, life and social sciences, 7th edition, Boston New York, Houghton Company.

[6] Chiang A.C.(1994) Osnovne metode matematičke ekonomije, MATE, Zagreb.