

VELEUČILIŠTE U ŠIBENIKU

Stručni prijediplomski studij Promet



L. Olivari

Teorija kretanja vozila:
zbirka zadataka i upute za izradu vučnog
proračuna

Šibenik, 2023.

Izdavač

VELEUČILIŠTE U ŠIBENIKU

Za izdavača

Dekan Veleučilišta u Šibeniku

dr.sc. Ljubo Runjić

Recenzenti

prof. dr. sc. Ernest Bazijanc

mr. sc. Srećko Đuranović

ISBN 978-953-7566-54-8

Predgovor

Nastavna literatura *Teorija kretanja vozila: zbirka zadataka i upute za izradu vučnog proračuna* namijenjena je studentima stručnog studija *Promet* kao obavezna literatura za kolegij *Teorija kretanja vozila*.

Nastavni materijal je podijeljen na dva dijela, I. dio je zbirka zadataka, a II. dio su upute za izradu vučnog proračuna. Zbirka zadataka sadrži riješene i objašnjene zadatke koji su osmišljeni kako bi se studentima olakšalo usvajanje gradiva kolegija. Upute za izradu proračuna napravljene su u obliku izrade vučnog proračuna jednog hipotetskog cestovnog vozila. Izrazi u zadatcima i u vučnom proračunu su opisivani s nužnim objašnjenjem, ali bez detaljnog teorijskog obrazlaganja jer se pretpostavlja da su studenti upoznati s potrebnim teorijskim podlogama na predavanjima.

Za izradu proračuna i dijagrama je korišten program Microsoft Excel. Podloge za proračun izrađene u Excel programu su sastavni ove literature i dostupne se na e-learning stranicama Veleučilišta u Šibeniku.

Posebna zahvala ide recenzentima prof. dr. sc. Ernestu Bazijancu i mr. sc. Srećku Đuranoviću na uloženom trudu prilikom pregleda materijala, ukazanim propustima i korisnim savjetima.

U Šibeniku, 2023.

Autor

Sadržaj

I. DIO

1.	KONSTRUKCIJA VOZILA	1
2.	OSOVINSKE REAKCIJE	13
3.	JEDNADŽBA KRETANJA VOZILA	25
4.	POTROŠNJA GORIVA	56
5.	STABILNOST VOZILA	65
6.	UBRZANJE VOZILA	83
7.	KOČENJE VOZILA	95

II. DIO

1.	KARAKTERISTIKE VOZILA I PUTA	108
1.1.	Karakteristike vozila	108
1.2.	Transmisija.....	109
1.3.	Vanjska brzinska karakteristika motora.....	110
1.4.	Karakteristike puta	112
2.	OTPORI KRETANJA	114
2.1.	Otpori kotrljanja.....	114
2.2.	Otpori zraka	115
2.3.	Otpori uspona.....	116
2.4.	Ukupni otpori kretanja	116
3.	VUČNE SILE I SNAGE.....	121
3.1.	Vučne sile.....	121
3.2.	Vučna snaga	124
3.3.	Sile prijanjanja	127
3.4.	Vučni dijagram.....	131
4.	UBRZANJE I DINAMIČKE KARAKTERISTIKE VOZILA.....	134
4.1.	Određivanje dinamičke karakteristike i ubrzanja vozila.....	134
4.2.	Najveći uspon u pojedinom stupnju prijenosa	136
4.3.	Određivanje vremena ubrzanja	137
4.4.	Određivanje prijeđenoga puta kod ubrzavanja	139
5.	ZAKLJUČAK.....	141
	LITERATURA	142

Oznake, značenja, mjerne jedinice

G	težina	N
A	čelna površina vozila	m^2
C_x	faktor otpora zraka	
r_d	dinamički radijus kotača	m
l	međuosovinski razmak	m
l_l, l_p	udaljenost težišta vozila od prednje osovine	m
l_2, l_z	udaljenost težišta vozila od stražnje osovine	m
h_T	visina težišta vozila	m
η	stupanj iskoristivosti	
i	prijenosni omjer	
M_e	okretni moment motora	Nm
P_e, P'_M	efektivna snaga motora	W
P_k	snaga na kotačima vozila	W
ω_m	kutna brzina motora	rad/s
n	broj okretaja, brzina vrtnje	okr/min
e_M	elastičnost motora po momentu	
e_n	elastičnost motora po broju okretaja	
f	faktor otpora kotrljanja	
μ, φ	faktor prisanjanja	
u	uspon puta	%
α	kut uspona ceste	°
β	kut nagiba ceste	°
p	faktor otpora puta	
F_k	sila otpora kotrljanja	N
F_z	sila otpora zraka	N
F_u	sila otpora uspona	N
F_i	sila otpora inercije	N
F_p	sila otpora puta	N
F_{pr}	sila prisanjanja	N

$P_k, P_{ot(k)}$	snaga potrebna za savladavanje otpora kotrljanja	W
$P_z, P_{ot(z)}$	snaga potrebna za savladavanje otpora zraka	W
$P_u, P_{ot(u)}$	snaga potrebna za savladavanje otpora uspona	W
$P_p, P_{ot(p)}$	snaga potrebna za savladavanje otpora puta	W
ρ_z	gustoća zraka	kg/m ³
ρ_g	gustoća goriva	kg/m ³
v	brzina vozila	m/s
a	ubrzanje/usporenje vozila	m/s ²
G_{N1}, G_{Np}, N_1	dinamička reakcija tla na prednjoj osovini	N
G_{N2}, G_{Ns}, N_2	dinamička reakcija tla na stražnjoj osovini	N
F_m	motorna vučna sila	N
F_v	vučna sila	N
D	dinamički faktor	
δ	faktor utjecaja rotirajućih masa	
t	vrijeme	s
s	put	m
V	volumen	m ³
$bsfc, g$	specifična potrošnja goriva	g/kWh
G_H	satna potrošnja goriva	kg/h
G	prosječna potrošnja goriva u kilogramima na 100 km	kg/100 km
Q	prosječna potrošnja goriva u litrama na 100 km	l/100 km
$2s$	trag kotača	m
$F_{kč}$	sila kočenja	N
K	faktor raspodjele kočenja	
e_M	elastičnost motora po okretnom momentu	
e_n	elastičnost motora po broju okretaja	
E	ukupna elastičnost motora	

I. DIO

ZBIRKA ZADATAKA s riješenim primjerima iz teorije kretanja vozila

1. KONSTRUKCIJA VOZILA

1.1. Na izlazu motora s unutrašnjim izgaranjem se ostvaruje efektivna snaga motora od 30 kW pri 2000 okretaja po minuti koljenastog vratila. Koliki se moment ostvaruje na izlazu motora?

Rješenje:

Moment na izlazu motora može se izračunati preko poznatog izraza za snagu, gdje je efektivna snaga motora umnožak momenta na izlazu motora i kutne brzine koljenastog vratila:

$$P_e = M_M \cdot \omega_M$$

$$M_M = \frac{P_e}{\omega_M}$$

Kutna brzina motora je:

$$\omega_M = 2\pi n_M$$

Budući da je brzina vrtnje zadana u okretajima po minuti, izraz postaje:

$$\omega_M = \frac{2\pi n_M}{60}$$

Konačno, moment se računa kao:

$$M_M = \frac{P_e}{\omega_m} = \frac{P_e}{\frac{2\pi n_M}{60}} = \frac{30 \cdot P_e}{\pi \cdot n}$$

$$M_M = \frac{30 \cdot 30\,000}{\pi \cdot 2000}$$

$$M_M = 143,2 \text{ Nm}$$

1.2. Vanjska brzinska karakteristika motora je zadana tablično. Potrebno je izračunati elastičnost motora po momentu, elastičnost motora po broju okretaja i ukupnu elastičnost motora.

n [okr/min]	1000	1500	2000	2500	3000	3750	4500
Me [Nm]	150	245	260	257	245	216	170
Pe [kW]	15,7	38,5	54,5	67,3	77	85	80

Rješenje:

Elastičnost motora po momentu je jednaka omjeru maksimalnog momenta i momenta pri maksimalnoj snazi motora. Iz tablice se očitavaju vrijednosti:

$$Me_{max} = 260 \text{ Nm}$$

$$Pe_{max} = 216 \text{ kW za } P_{max} = 85 \text{ kW}$$

$$e_M = \frac{Me_{max}}{Pe_{max}} = \frac{260}{216} = 1,20$$

Elastičnost motora po broju okretaja je jednaka omjeru broja okretaja pri maksimalnoj snazi i broju okretaja pri maksimalnom momentu. Iz tablice se očitavaju vrijednosti:

$$n_{P_{max}} = 3750 \text{ za } P_{max} = 85 \text{ kW}$$

$$n_{M_{max}} = 2000 \text{ za } Me_{max} = 260 \text{ Nm}$$

$$e_n = \frac{n_{P_{max}}}{n_{M_{max}}} = \frac{3750}{2000} = 1,88$$

Ukupna elastičnost motora je jednaka umnošku elastičnosti motora po momentu i elastičnosti motora po broju okretaja:

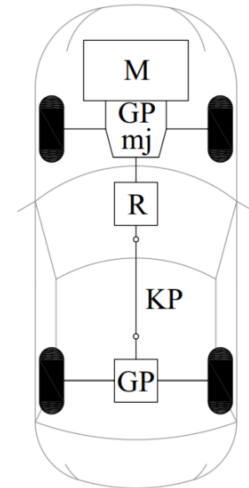
$$E = e_M e_n = 1,20 \cdot 1,88 = 2,25$$

Veća elastičnost motora omogućuje ugodniju vožnju bez česte promjene stupnja prijenosa.

1.3. Za terensko vozilo s pogonom na sva četiri kotača (na slici) su zadani prijenosni omjeri mjenjača za sve stupnjeve prijenosa: $i_I = 4,14$; $i_{II} = 2,93$; $i_{III} = 2,05$; $i_{IV} = 1,43$; $i_V = 1$; prijenosni omjer glavnog prijenosnika $i_{GP} = 4,1$; i prijenosni omjer razvodnika snage $i_R = 2,72$.

Faktori iskoristivosti svih elementa transmisije su: mjenjač $\eta_{mj} = 0,97$; kardanski prijenos $\eta_{KP} = 1$; glavni prijenosnik $\eta_{GP} = 0,95$; razvodnik snage $\eta_R = 0,96$.

Koliki je ukupni stupanj iskoristivosti i prijenosni omjer u drugom stupnju prijenosa ovog vozila?



Slika 1

Rješenje:

Ukupan prijenosni omjer od motora do kotača automobila se računa kao umnožak prijenosnog omjera u odabranom stupnju prijenosa, prijenosnog omjera glavnog prijenosnika i razvodnika snage:

$$i_{uk} = i_{II} \cdot i_{GP} \cdot i_R$$

$$i_{uk} = 2,93 \cdot 4,1 \cdot 2,72$$

$$i_{uk} = 32,68$$

Ukupan stupanj iskoristivosti se računa kao umnožak stupnjeva iskoristivosti svih elemenata transmisije:

$$\eta_{uk} = \eta_{mj} \cdot \eta_{GP}^2 \cdot \eta_{KP} \cdot \eta_R$$

$$\eta_{uk} = 0,97 \cdot 0,95^2 \cdot 1 \cdot 0,96 = 0,84$$

$$\eta_{uk} = 84 \%$$

1.4. Motor automobila se okreće s 2500 okretaja u minuti, a ukupni prijenosni omjer transmisije je $i_{uk} = 8,2$. Ako su pogonski kotači automobila dinamičkog radijusa 34 cm, kolika je brzina kretanja automobila?

Rješenje:

Broj okretaja pogonskih kotača može se izračunati preko izraza za ukupni prijenosni omjer, koji je jednak omjeru broja okretaja motora i broja okretaja kotača:

$$i_{uk} = \frac{n_M}{n_K} \Rightarrow n_K = \frac{n_M}{i_{uk}} = \frac{2500}{8,2} = 304,9 \frac{okr}{min}$$

Odnosno, u jednoj sekundi kotači se okreću:

$$n_K = \frac{304,9}{60} = 5,08 \frac{okr}{s}$$

Pri jednom okretaju, kotač automobila prevali put u iznosu jednog vlastitog opsega. Ako je dinamički radijus kotača 34 cm, odnosno 0,34 m, onda je njegov opseg:

$$O = 2 \pi r_d = 2 \cdot \pi \cdot 0,34 = 2,14 \text{ m}$$

Dakle, pri jednom okretaju kotača, automobil prevali put od 2,14 m. U jednoj sekundi, automobil će prevaliti put jednak umnošku broja okretaja i opsega kotača:

$$v = n_K \cdot O = 5,08 \cdot 2,14 = 10,9 \frac{m}{s}$$

Brzina automobila mogla bi se jednostavnije izračunati i prema izrazu za obodnu brzinu kotača:

$$v = \omega_K r_d = 2 \pi n_K \cdot r_d$$

$$v = 2 \cdot \pi \cdot 5,08 \cdot 0,34 = 10,9 \frac{m}{s}$$

Odnosno, brzina pretvorena u kilometre po satu iznosi:

$$v = 10,9 \cdot \frac{3600}{1000} = 39 \frac{km}{h}$$

1.5. Motor automobila na izlazu motora ostvaruje moment od 150 Nm pri broju okretaja od 2000 okr/min. Pri tome je efektivna snaga motora 31,4 kW.

Podatci o vozilu:

Prijenosni omjer mjenjača u ovisnosti o stupnju prijenosa:

$$i_I = 4,55$$

$$i_{II} = 2,36$$

$$i_{III} = 1,7$$

$$i_{IV} = 1,24$$

$$i_V = 1$$

Prijenosni omjer glavnog prijenosnika (diferencijala) iznosi:

$$i_{GP} = 4,1$$

Prijenosni omjer razvodnika snage iznosi:

$$i_R = 1$$

Stupnjevi iskoristivosti:

mjenjač $\eta_{mj} = 0,95$

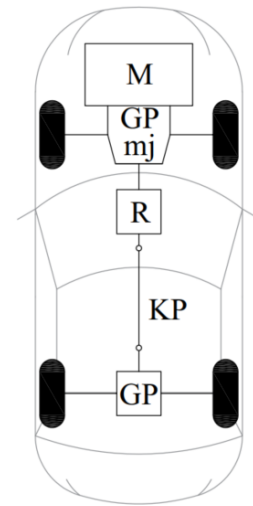
kardanski prijenos $\eta_{KP} = 0,99$

glavni prijenosnik $\eta_{GP} = 0,96$

razvodnik snage $\eta_R = 0,94$

Dinamički radijus kotača:

$$r_d = 0,35 \text{ m}$$



Slika 2

Izračunati za **treći stupanj** prijenosa:

- Faktor iskoristivosti transmisije? Kolika se snaga ostvaruje na pogonskim kotačima?
- Koliki se moment ostvaruje na pogonskim kotačima?
- Kojim brojem okretaja se okreću pogonski kotači automobila? Kojom se brzinom kreće automobil?
- Što bi se promijenilo da se automobil kreće u četvrtom stupnju prijenosa?

Rješenje:

a) Ukupni faktor iskoristivosti transmisije se računa kao umnožak svih faktora iskoristivosti pojedinih elemenata transmisije:

$$\eta_{UK} = \eta_{mj} \cdot \eta_{GP}^2 \cdot \eta_R \cdot \eta_{KP} = 0,95 \cdot 0,96^2 \cdot 0,94 \cdot 0,99 = 0,815$$

Snaga na pogonskim kotačima je snaga motora umanjena za gubitke u transmisiji:

$$P_k = P_M \cdot \eta_{uk} = 31,4 \cdot 0,815 = 25,6 \text{ kW}$$

b) Da bi se izračunao moment na pogonskim kotačima, prvo je potrebno izračunati ukupni prijenosni omjer za zadani stupanj prijenosa:

$$i_{uk} = i_{III} \cdot i_{GP} \cdot i_R = 1,7 \cdot 4,1 \cdot 1 = 6,97$$

$$M_k = M_M \cdot i_{uk} \cdot \eta_{uk} = 150 \cdot 6,97 \cdot 0,815 = 852,1 \text{ Nm}$$

c) Broj okretaja pogonskih kotača:

$$i_{uk} = \frac{n_M}{n_K} \Rightarrow n_K = \frac{n_M}{i_{uk}} = \frac{2000}{6,97} = 286,94 \frac{\text{okr}}{\text{min}} = 4,78 \frac{\text{okr}}{\text{s}}$$

Brzina automobila se može izračunati preko broja okretaja kotača. Pri jednom okretaju kotač se pomakne prema naprijed za iznos duljine svog opsega:

$$O = 2\pi r_d = 2 \cdot \pi \cdot 0,35 = 2,2 \text{ m}$$

Ako se kotač okreće brzinom 4,78 okretaja u sekundi, znači da u jednoj sekundi prijeđe udaljenost od 4,78 svojeg opsega. Što znači da se brzina kojom se automobil kreće računa kao:

$$v = n_k \cdot O = 4,78 \cdot 2,2 = 10,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 37,86 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Brzina automobila mogla bi se izračunati i prema izrazu za obodnu brzinu:

$$v = \omega_k r_d = 2 \pi n_K \cdot r_d = 2 \cdot 3,15 \cdot 4,78 \cdot 0,35 = 10,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

d) Ako bi se promatrao ovaj automobil pri istom režimu rada, ali u četvrtom stupnju prijenosa:

Ukupni prijenosni omjer bi bio manji, što znači da bi moment na kotačima također bio manji, ali bi se povećao broj okretaja pogonskih kotača, a time i brzina automobila.

$$i_{uk} = i_{IV} \cdot i_{GP} \cdot i_R = 1,24 \cdot 4,1 \cdot 1 = 5,08$$

$$M_k = M_M \cdot i_{uk} \cdot \eta_{uk} = 150 \cdot 5,08 \cdot 0,815 = 621,5 \text{ Nm}$$

$$i_{uk} = \frac{n_M}{n_K} \Rightarrow n_K = \frac{n_M}{i_{uk}} = \frac{2000}{5,08} = 393,7 \frac{\text{okr}}{\text{min}} = 6,56 \frac{\text{okr}}{\text{s}}$$

$$v = n_K \cdot O = 6,56 \cdot 2,2 = 14,43 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 51,97 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

1.6. Motor automobila pri $n_M = 3000 \text{ okr/min}$ na izlazu motora ostvaruje moment od $M_M = 171 \text{ Nm}$, pri tome je efektivna snaga motora $53,7 \text{ kW}$.

Podatci o vozilu:

Prijenosni omjer mjenjača u ovisnosti o stupnju prijenosa:

$$i_I = 5,01$$

$$i_{II} = 2,83$$

$$i_{III} = 1,79$$

$$i_{IV} = 1,26$$

$$i_V = 1$$

Prijenosni omjer glavnog prijenosnika (diferencijala) iznosi:

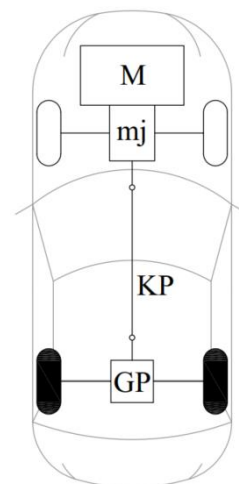
$$i_{GP} = 2,65$$

Stupnjevi iskoristivosti:

$$\text{mjenjač } \eta_{mj} = 0,95$$

$$\text{kardanski prienos } \eta_{KP} = 0,99$$

$$\text{glavni prijenosnik } \eta_{GP} = 0,96$$



Slika 3

Vozilo koristi pneumatike 235/70R15 za koje je u katalogu zadan podatak o broju okretaja po prijeđenoj milji (eng. *revolutions per mile*). Za navedeni pneumatik zadano je 745 okretaja po milji.

$$\text{Revs/mile} = 745 \text{ okr/mi}$$

Izračunati za četvrti stupanj prijenosa:

- Iskoristivost transmisije? Kolika se snaga ostvaruje na pogonskim kotačima?
- Koliki se moment ostvaruje na pogonskim kotačima?
- Kojim brojem okretaja se okreću pogonski kotači automobila? Kojom se brzinom kreće automobil?

Rješenje:

a) Pogon na stražnje kotače ima jednostavniju transmisiju, tj. manje elemenata nego pogon na sva četiri kotača. Faktor iskoristivosti se računa kao:

$$\eta_{UK} = \eta_{mj} \cdot \eta_{GP} \cdot \eta_{KP} = 0,95 \cdot 0,96 \cdot 0,99 = 0,903$$

Ostvarena snaga na pogonskim kotačima je:

$$P_k = P_M \cdot \eta_{uk} = 53,7 \cdot 0,903 = 48,5 \text{ kW}$$

b) Ukupan prijenosni omjer u IV. stupnju prijenosa:

$$i_{uk} = i_{IV} \cdot i_{GP} = 1,26 \cdot 2,65 = 3,34$$

Moment koji se ostvaruje na kotačima je uvećan za prijenosni omjer, a umanjen za gubitke u transmisiji:

$$M_k = M_M \cdot i_{uk} \cdot \eta_{uk} = 171 \cdot 3,34 \cdot 0,903 = 515,7 \text{ Nm}$$

c) Broj okretaja pogonskih kotača:

$$i_{uk} = \frac{n_M}{n_K} \Rightarrow n_K = \frac{n_M}{i_{uk}} = \frac{3000}{3,34} = 898,2 \frac{\text{okr}}{\text{min}} = 15 \frac{\text{okr}}{\text{s}}$$

Kako dinamički radijus pneumatika nije zadan, već je zadan podatak o broju okretaja kotača po prijedenoj milji puta (1 milja = 1602 m), opseg kotača se može izračunati kao:

$$O = \frac{1602}{\text{okr}/\text{mi}} = \frac{1602}{745} = 2,15 \text{ m}$$

Brzina kojom se automobil kreće računa se kao:

$$v = n_k \cdot O = 15 \cdot 2,15 = 32,25 \frac{m}{s} = 116,1 \frac{km}{h}$$

1.7. Motor vozila s prednjim pogonom pri $n_M = 3000$ okr/min na izlazu motora ostvaruje efektivnu snagu motora 77,2 kW.

Podatci o vozilu

Prijenosni omjer mjenjača u ovisnosti o stupnju prijenosa:

$$i_I = 4,27$$

$$i_{II} = 2,16$$

$$i_{III} = 1,3$$

$$i_{IV} = 1,0$$

$$i_V = 0,74$$

Prijenosni omjer glavnog prijenosnika (diferencijala) iznosi:

$$i_{GP} = 3,72$$

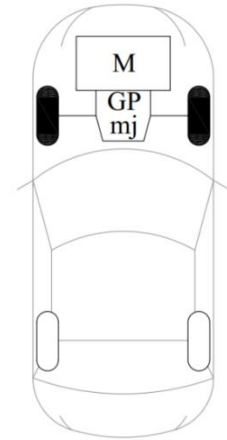
Stupnjevi iskoristivosti:

$$\text{mjenjač } \eta_{mj} = 0,97$$

$$\text{glavni prijenosnik } \eta_{GP} = 0,98$$

Dinamički radijus kotača:

$$r_d = 0,309 \text{ m}$$



Slika 4

Izračunati za **peti stupanj** prijenosa:

- Stupanj iskoristivosti transmisije? Kolika se snaga ostvaruje na pogonskim kotačima?
- Koliki se moment ostvaruje na pogonskim kotačima?
- Kojim brojem okretaja se okreću pogonski kotači automobila? Kojom se brzinom kreće automobil?

Rješenje:

a) Ukupni faktor iskoristivosti transmisije se računa kao umnožak svih faktora iskoristivosti pojedinih elemenata transmisije:

$$\eta_{UK} = \eta_{mj} \cdot \eta_{GP} = 0,97 \cdot 0,98 = 0,95$$

Snaga na pogonskim kotačima je snaga motora umanjena za gubitke u transmisiji:

$$P_k = P_M \cdot \eta_{uk} = 77,2 \cdot 0,95 = 73,34 \text{ kW}$$

b) Prijenosni omjer za zadani stupanj prijenosa:

$$i_{uk} = i_V \cdot i_{GP} = 0,74 \cdot 3,72 = 2,75$$

Moment na izlazu motora se može izračunati iz zadane snage i broja okretaja:

$$P_M = M_M \cdot \omega_M = M_M \cdot 2\pi n_M$$

$$M_M = \frac{P_M}{2\pi n_M} = \frac{77\,200}{2 \cdot \pi \cdot 50} = 245,7 \text{ Nm}$$

Moment koji se ostvaruje na kotačima:

$$M_k = M_M \cdot i_{uk} \cdot \eta_{uk} = 245,7 \cdot 2,75 \cdot 0,95 = 642 \text{ Nm}$$

c) Broj okretaja pogonskih kotača:

$$i_{uk} = \frac{n_M}{n_K} \Rightarrow n_K = \frac{n_M}{i_{uk}} = \frac{3000}{2,75} = 1090,9 \frac{\text{okr}}{\text{min}} = 18,2 \frac{\text{okr}}{\text{s}}$$

Opseg kotača:

$$O = 2 \pi r_d = 1,94 \text{ m}$$

Brzina kojom se vozilo kreće:

$$v = n_k \cdot O = 18,2 \frac{\text{okr}}{\text{s}} \cdot 1,94 \text{ m} = 35,34 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 127,2 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

1.8. Motor terenskog vozila pri $n_M = 1600$ okr/min na izlazu motora ostvaruje moment od $M_M = 477$ Nm. Podatci o vozilu:

Prijenosni omjer mjenjača u ovisnosti o stupnju prijenosa:

$$i_I = 5,64$$

$$i_{II} = 2,97$$

$$i_{III} = 1,66$$

$$i_{IV} = 1,0$$

$$i_V = 0,74$$

Prijenosni omjer glavnog prijenosnika (diferencijala) iznosi:

$$i_{GP} = 5,125$$

Prijenosni omjer razvodnika snage iznosi:

$$i_R = 1$$

Stupnjevi iskoristivosti:

$$\text{mjenjač } \eta_{mj} = 0,94$$

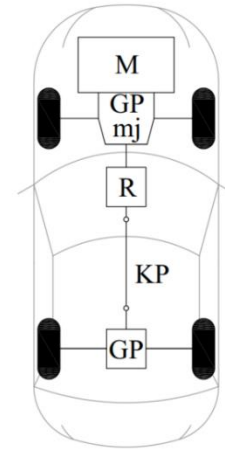
$$\text{kardanski prijenos } \eta_{KP} = 0,98$$

$$\text{glavni prijenosnik } \eta_{GP} = 0,95$$

$$\text{razvodnik snage } \eta_R = 0,96$$

Dinamički radijus kotača:

$$r_d = 0,515 \text{ m}$$



Slika 5

Izračunati za **drugi stupanj** prijenosa:

- Stupanj iskoristivosti transmisije? Kolika se snaga ostvaruje na pogonskim kotačima?
- Koliki se moment ostvaruje na pogonskim kotačima?
- Kojom se brzinom kreće vozilo?

Rješenje:

a) Efektivna snaga motora:

$$P_M = M_M \cdot \omega_M = M_M \cdot 2 \pi n_M = 477 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 26,7 = 80 \text{ kW}$$

Ukupni faktor iskoristivosti transmisije:

$$\eta_{UK} = \eta_{mj} \cdot \eta_{GP}^2 \cdot \eta_R \cdot \eta_{KP} = 0,94 \cdot 0,95^2 \cdot 0,96 \cdot 0,98 = 0,798$$

Snaga na pogonskim kotačima:

$$P_k = P_M \cdot \eta_{uk} = 80 \cdot 0,798 = 63,84 \text{ kW}$$

b) Prijenosni omjer za zadani stupanj prijenosa:

$$i_{uk} = i_{II} \cdot i_{GP} \cdot i_R = 2,97 \cdot 5,125 \cdot 1 = 15,22$$

$$M_k = M_M \cdot i_{uk} \cdot \eta_{uk} = 477 \cdot 15,22 \cdot 0,798 = 5\,793 \text{ Nm}$$

c) Broj okretaja pogonskih kotača:

$$i_{uk} = \frac{n_M}{n_K} \Rightarrow n_K = \frac{n_M}{i_{uk}} = \frac{1600}{15,22} = 105,12 \frac{\text{okr}}{\text{min}} = 1,75 \frac{\text{okr}}{\text{s}}$$

Opseg kotača:

$$O = 2\pi r_d = 2 \cdot \pi \cdot 0,515 = 3,2 \text{ m}$$

Brzina kojom se vozilo kreće:

$$v = n_k \cdot O = 1,75 \cdot 3,23 = 5,65 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 20,3 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

2. OSOVINSKE REAKCIJE

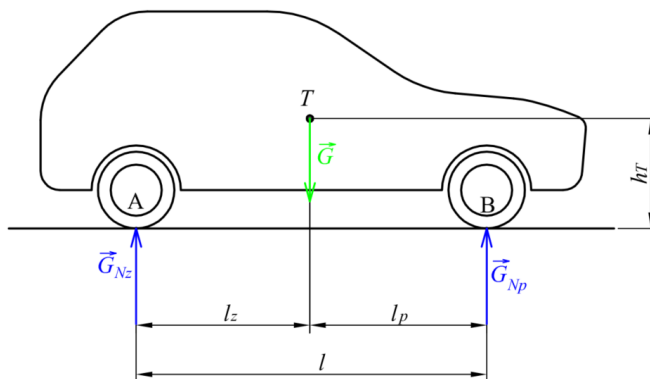
2.1. Za vozilo mase 1550 kg je zadano: visina težišta $h_T = 0,52$ m, udaljenost težišta od stražnje osovine $l_z = 1,5$ m, međuosovinski razmak $l = 2,7$ m.

Potrebno je skicirati vozilo i odrediti:

- Statičke reakcije tla ako vozilo miruje na horizontalnoj podlozi i odnos raspodjele težine u postotku.
- Statičke reakcije tla ako vozilo miruje na usponu 12% i promjenu ukupnog normalnog opterećenja tla.

Rješenje:

a)



Slika 6

Udaljenost prednje osovine od težišta se može jednostavno izračunati iz:

$$l = l_z + l_p$$

$$l_p = l - l_z = 2,7 - 1,5 = 1,2 \text{ m}$$

Težina se također jednostavno izračuna iz poznatog izraza:

$$G = mg = 1550 \cdot 9,81 = 15\,205,5 \text{ N}$$

Osovinska opterećenja na prednjoj i stražnjoj osovini (G_p i G_z) su aktivne sile kojima se suprotstavljaju pasivne reakcije podloge (G_{Np} i G_{Nz}). Navedene sile su istog iznosa, ali su suprotno usmjerene.

Statičke reakcije podloge mogu se dobiti postavljanjem sume momenata oko točke A (točka kontakta između stražnjih kotača i podloge) i točke B (točka kontakta između prednjih kotača i podloge).

$$\sum M_A = -G l_z + G_{Np} l = 0$$

$$G_{Np} = \frac{G l_z}{l} = \frac{15\,205,5 \cdot 1,5}{2,7} = 8447,5 \text{ N}$$

$$\sum M_B = -G_{Nz} l + G l_p = 0$$

$$G_{Nz} = \frac{G l_p}{l} = \frac{15\,205,5 \cdot 1,2}{2,7} = 6758 \text{ N}$$

Jednostavnom provjerom može se utvrditi da je:

$$G_{Np} + G_{Nz} = 8447,5 + 6758 = 15\,205,5 \text{ N}$$

$$G_{Np} + G_{Nz} = G$$

U praksi često osovinske reakcije izražavaju kroz postotak. Odnos raspodjele opterećenja u postotku se računa kao:

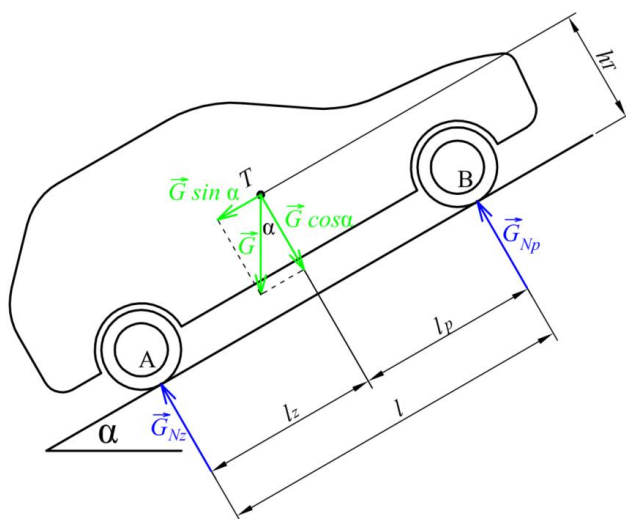
$$\frac{G_{Np}}{G} = \frac{8447,5}{15\,205,5} = 0,556 = 55,6 \%$$

$$\frac{G_{Nz}}{G} = \frac{6758}{15\,205,5} = 0,444 = 44,4 \%$$

Za ovo vozilo odnos raspodjele težine po osovinama, tj. prednja/zadnja osovina bi se u postotku izrazio kao:

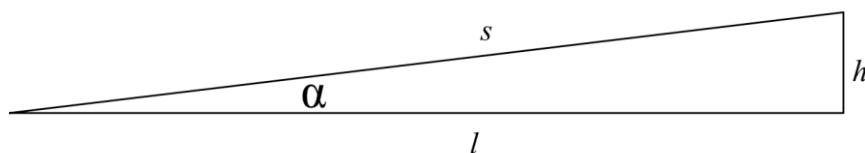
$$55,6 \%/44,4\%$$

b)



Slika 7

Uspon $u = 12\% = 0,12$ označava odnos visine h koju je vozilo savladalo i duljine l koju je vozilo prevalilo u horizontalnoj ravni. Odnosno uspon od, npr. 12% znači da je vozilo savladalo visinu od 12 m na duljini od 100 m u horizontalnoj ravni.



Slika 8

$$u = \frac{h}{l}$$

Što odgovara tangensu kuta α :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{l} = \frac{12}{100} = u = 0,12$$

Iznos kuta se može dobiti iz izraza:

$$\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} u = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 0,12 = 6,84^\circ$$

Statičke reakcije podloge vozila na usponu mogu se ponovo dobiti postavljanjem sume momenata oko točaka A i B:

$$\sum M_A = G \sin \alpha h_T - G \cos \alpha l_z + G_{Np} l = 0$$

$$G_{Np} = \frac{G \cos \alpha l_z - G \sin \alpha h_T}{l} = \frac{15\,205,5 \cdot \cos 6,84 \cdot 1,5 - 15\,205,5 \cdot \sin 6,84 \cdot 0,52}{2,7}$$

$$G_{Np} = 8038,6 \text{ N}$$

$$\sum M_B = -G_{Nz} l + G \sin \alpha h_T + G \cos \alpha l_p = 0$$

$$G_{Nz} = \frac{G \cos \alpha l_p + G \sin \alpha h_T}{l} = \frac{15\,205,5 \cdot \cos 6,84 \cdot 1,2 + 15\,205,5 \cdot \sin 6,84 \cdot 0,52}{2,7}$$

$$G_{Nz} = 7\,058,7 \text{ N}$$

Može se zaključiti da na usponu, moment sile $G \sin \alpha$ na kraku h_T nastoji dodatno opteretiti stražnju osovinu i rasteretiti prednju, dok bi u slučaju nizbrdice situacija bila obrnuta.

Zbroj osovinskih opterećenja prednje i stražnje osovine je manji od težine vozila, zbog toga što se na podlogu prenosi samo komponenta težine $G \cos \alpha$:

$$G_{Np} + G_{Nz} = 8038,6 + 7058,7 = 15\,097,3 \text{ N}$$

$$G_{Np} + G_{Nz} < G$$

$$G \cos \alpha = 15\,097,3 \text{ N}$$

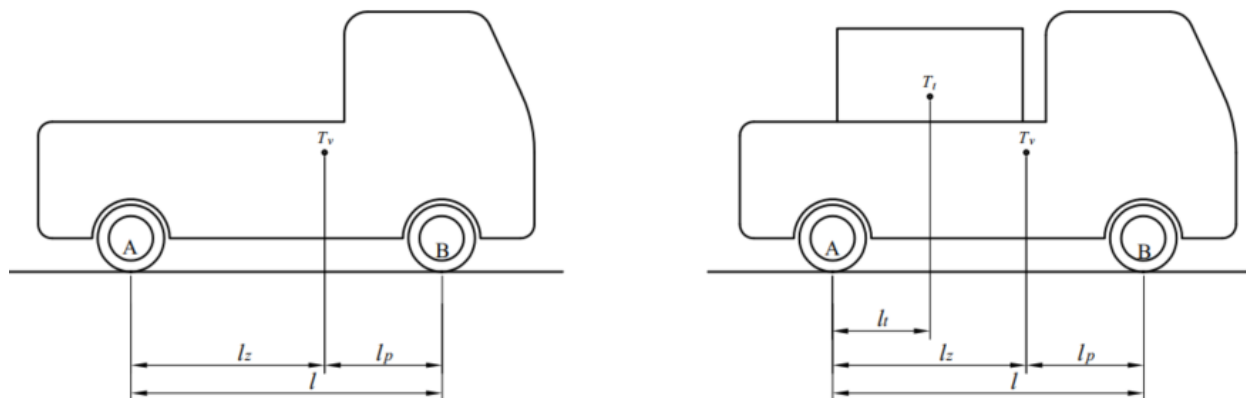
$$G_{Np} + G_{Nz} = G \cos \alpha$$

Promjena ukupnog normalnog opterećenja izračunava se iz izraza:

$$G - (G_{Np} + G_{Nz}) = 108,2 \text{ N}$$

2.2. Vaganjem praznog kamiona izmjerene su masa na prednjoj osovini 3243,6 kg i masa na stražnjoj osovini 2376,4 kg. Ako je međuosovinski razmak između prednje i stražnje osovine 3,78 m, potrebno je odrediti:

- udaljenost težišta vozila od prednje, odnosno stražnje osovine, te statičke reakcije podloge;
- osovinske reakcije ako se u kamion utovari teret mase 3000 kg čije je težište udaljeno od stražnje osovine 1,23 m.



Slika 9

Rješenje:

Izmjerene mase na prednjoj i stražnjoj osovini predstavljaju statičke reakcije podloge i mogu se izračunati kao:

$$G_{Np} = m_p g = 3243,6 \cdot 9,81 = 31\,819,7 \text{ N}$$

$$G_{Nz} = m_z g = 2376,4 \cdot 9,81 = 23\,312,5 \text{ N}$$

Ukupna težina vozila iznosi:

$$G = G_{Np} + G_{Nz} = 31\,819,7 + 23\,312,5 = 55\,132,2 \text{ N}$$

Postavljanjem sume momenata oko točaka A i B mogu se dobiti udaljenosti težišta od osovina:

$$\begin{aligned} \sum M_A &= -G l_z + G_{Np} l = 0 \\ l_z &= \frac{G_{Np} l}{G} = \frac{31\,819,7 \cdot 3,78}{55\,132,2} = 2,18 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_B &= -G_{Nz} l + G l_p = 0 \\ l_p &= \frac{G_{Nz} l}{G} = \frac{23\,312,5 \cdot 3,78}{55\,132,2} = 1,6 \text{ m} \end{aligned}$$

b) Kada bi se na kamion utovarilo teret mase m_t , statičke reakcije podloge bi se računale postavljanjem sume momenata oko točaka A i B koje uzimaju u obzir i utjecaj tereta:

$$G_t = m_t g = 3000 \cdot 9,81 = 29\,430 \text{ N}$$

$$\sum M_A = -G_t l_t - G l_z + G_{Np} l = 0$$

$$G_{Np} = \frac{G_t l_t + G l_z}{l} = \frac{29\,430 \cdot 1,23 + 55\,132,2 \cdot 2,18}{3,78} = 41\,372,2 \text{ N}$$

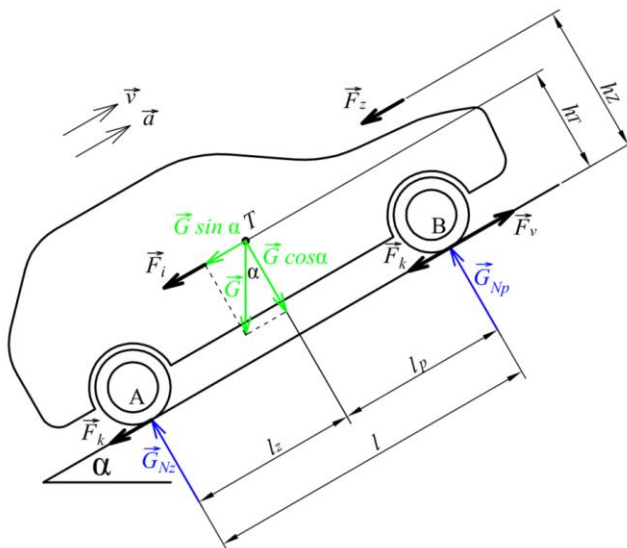
Statička reakcija podloge kod stražnje osovine može se izračunati postavljanjem sume momenata oko točke B, ili iz jednakosti:

$$G + G_t = G_{Np} + G_{Nz}$$

$$G_{Nz} = G + G_t - G_{Np} = 55\,132,2 + 29\,430 - 41\,372,2 = 43\,190 \text{ N}$$

2.3. Vozilo mase 1,2 t kreće se jednoliko ubrzano po cesti uspona 2%. Ako na vozilo djeluje sila otpora zraka $F_z = 182,5 \text{ N}$, te sila otpora inercije $F_i = 430 \text{ N}$ potrebno je odrediti dinamičke reakcije podloge, te faktore preraspodjele opterećenja. Razmak prednje osovine od težišta je 1,12 m, razmak stražnje osovine od težišta je 1,48 m. Visina težišta je 0,48 m. Skicirati vozilo na usponu i sve sile koje djeluju na njega.

Rješenje:



Slika 10

Težina vozila i kut uspona su:

$$G = mg = 1\,200 \cdot 9,81 = 11\,772\, N$$

$$\alpha = \arctan u = \arctan 0,02 = 1,146^\circ$$

Da bi se odredili faktori preraspodjele opterećenja, prvo je potrebno izračunati statičke reakcije podloge kada vozilo miruje. U tom slučaju na vozilo ne djeluje sila otpora zraka niti sila otpora ubrzanja. Statičke reakcije se određuju po poznatim izrazima:

$$\begin{aligned} \sum M_A &= G \sin \alpha \, h_T - G \cos \alpha \, l_z + G_{Np(s)} \, l = 0 \\ G_{Np(s)} &= \frac{G \cos \alpha \, l_z - G \sin \alpha \, h_T}{l} = \frac{11\,772 \cdot \cos 1,146 \cdot 1,48 - 11\,772 \cdot \sin 1,146 \cdot 0,48}{(1,12 + 1,48)} \\ G_{Np(s)} &= 6656,2\, N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_B &= -G_{Nz(s)} \, l + G \sin \alpha \, h_T + G \cos \alpha \, l_p = 0 \\ G_{Nz(s)} &= \frac{G \cos \alpha \, l_p + G \sin \alpha \, h_T}{l} = \frac{11\,772 \cdot \cos 1,146 \cdot 1,12 + 11\,772 \cdot \sin 1,146 \cdot 0,48}{(1,12 + 1,48)} \\ G_{Nz(s)} &= 5113,5\, N \end{aligned}$$

Za određivanje dinamičkih reakcija podloge, kod postavljanja sume momenata oko točaka A i B u obzir treba uzeti i sile otpora zraka i inercije, s tim da se može pretpostaviti da je točka djelovanja sile otpora zraka na jednakoj visini kao i težište vozila ($h_z \approx h_T$). Sila otpora kotrljanja i vučna sila ne rade moment jer njihovi pravci djelovanja prolaze kroz točke A i B:

$$\begin{aligned} \sum M_A &= F_i \, h_T + G \sin \alpha \, h_T - G \cos \alpha \, l_z + F_z \, h_T + G_{Np(d)} \, l = 0 \\ G_{Np(d)} &= \frac{G \cos \alpha \, l_z - F_i \, h_T - G \sin \alpha \, h_T - F_z \, h_T}{l} \\ G_{Np(d)} &= \frac{11\,772 \cdot \cos 1,146 \cdot 1,48 - 430 \cdot 0,48 - 11\,772 \cdot \sin 1,146 \cdot 0,48 - 182,5 \cdot 0,48}{(1,12 + 1,48)} \\ G_{Np(d)} &= 6543,1\, N \end{aligned}$$

$$\sum M_B = -G_{Nz(d)} l + F_i h_T + G \sin \alpha h_T + G \cos \alpha l_p + F_z h_T = 0$$

$$G_{Nz(d)} = \frac{F_i h_T + G \sin \alpha h_T + G \cos \alpha l_p + F_z h_T}{l}$$

$$G_{Nz(d)} = \frac{430 \cdot 0,48 + 11\,772 \cdot \sin 1,146 \cdot 0,48 + 11\,772 \cdot \cos 1,146 \cdot 1,12 + 182,5 \cdot 0,48}{(1,12 + 1,48)}$$

$$G_{Nz(d)} = 5226,5 \text{ N}$$

Faktori preraspodjele opterećenja su:

$$\frac{G_{Np(d)}}{G_{Np(s)}} = \frac{6543,1}{6656,2} = 0,983$$

$$\frac{G_{Nz(d)}}{G_{Nz(s)}} = \frac{5226,5}{5113,5} = 1,022$$

Može se zaključiti da u ovom slučaju, sila otpora inercije i sila otpora zraka, baš kao i sila otpora uspona nastoje više opteretiti stražnju osovinu, a rasteretiti prednju osovinu. Pri većim brzinama i ubrzanjima preraspodjela opterećenja bi bila veća.

2.4. Za vozilo je potrebno izračunati statičke reakcije podloge i grafički prikazati rezultate u dijagramu za slučaj kada se:

- a) vozilo nalazi na cesti s uzdužnim usponom, i to za uspone od 5%, 10%, 15%, 20% i 25%;
- b) vozilo nalazi na cesti s uzdužnim padom i to za pad od 5%, 10%, 15%, 20% i 25%.

Za vozilo je zadano: masa vozila 1422 kg; međuosovinski razmak je 3002 mm s preraspodjelom opterećenja 54%/46%, a visina težišta je 0,52 m.

Rješenje:

Udaljenost prednje, odnosno stražnje osovine od težišta se može dobiti iz preraspodjele opterećenja:

$$l_p = 0,46 \cdot 3,002 = 1,38 \text{ m}$$

$$l_z = 0,54 \cdot 3,002 = 1,62 \text{ m}$$

a) Statičke reakcije na usponu se određuju:

$$\sum M_A = G \sin \alpha h_T - G \cos \alpha l_z + G_{Np} l = 0$$

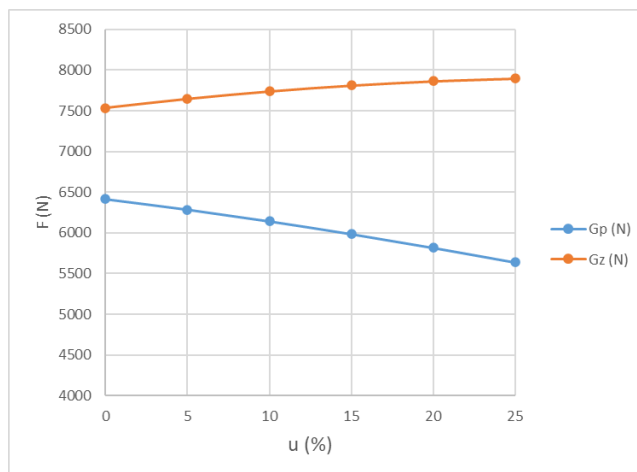
$$G_{Np} = \frac{G \cos \alpha l_z - G \sin \alpha h_T}{l}$$

$$\sum M_B = -G_{Nz} l + G \sin \alpha h_T + G \cos \alpha l_p = 0$$

$$G_{Nz} = \frac{G \cos \alpha l_p + G \sin \alpha h_T}{l}$$

Za različite uspone (0%, 5%, 10%, 15%, 20% i 25%) rezultati su prikazani tablično:

u (%)	α (°)	G_{Np} (N)	G_{Nz} (N)
0	0,0	6415	7535
5	2,9	6286	7646
10	5,7	6142	7738
15	8,5	5985	7810
20	11,3	5816	7863
25	14,0	5637	7896



Slika 11

b) Na cesti s uzdužnim padom (na nizbrdici), komponenta težine $G \sin \alpha$ će biti usmjerena prema prednjem dijelu vozila. Statičke reakcije na cesti s uzdužnim padom se određuju:

$$\sum M_A = G \sin \alpha h_T + G \cos \alpha l_z + G_{Np} l = 0$$

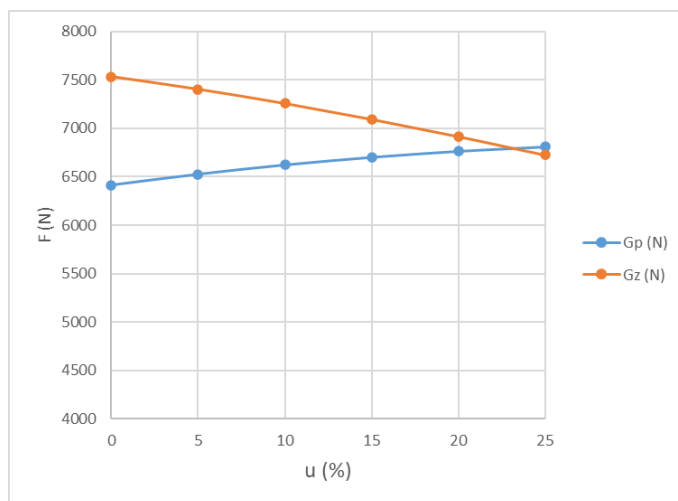
$$G_{Np} = \frac{G \cos \alpha l_z + G \sin \alpha h_T}{l}$$

$$\sum M_B = -G_{Nz} l - G \sin \alpha h_T + G \cos \alpha l_p = 0$$

$$G_{Nz} = \frac{G \cos \alpha l_p - G \sin \alpha h_T}{l}$$

Za različite uzdužne padove (0%, 5%, 10%, 15%, 20% i 25%) rezultati su prikazani tablično:

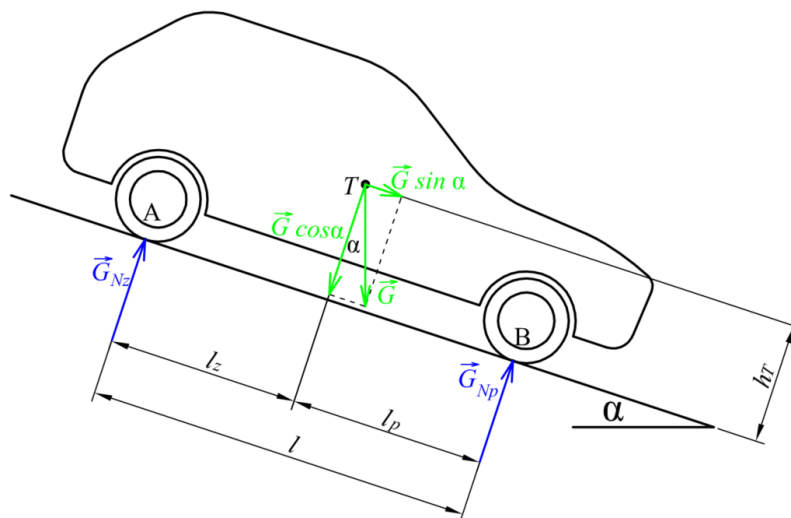
u (%)	α (°)	G_{Np} (N)	G_{Nz} (N)
0	0,0	6415	7535
5	2,9	6527	7405
10	5,7	6623	7257
15	8,5	6702	7093
20	11,3	6764	6915
25	14,0	6809	6724



Slika 12

2.5. Za vozilo mase 1400 kg je zadano: visina težišta 0,56 m, međuosovinski razmak 2,8 m i preraspodjela opterećenja na horizontalnoj podlozi je 52%/48%. Potrebno je skicirati vozilo i sile koje djeluju na njega, te odrediti osovinska opterećenja ako vozilo miruje na nizbrdici od 12%.

Rješenje:



Slika 13

Preko preraspodjele opterećenja na horizontalnoj podlozi može se odrediti udaljenost težišta od prednje, odnosno stražnje osovine:

$$G = mg = 1400 \cdot 9,81 = 13\,734 \text{ N}$$

$$G_{Np} = 0,52 G = 0,52 \cdot 13\,734 = 7\,141,7 \text{ N}$$

$$G_{Nz} = 0,48 G = 0,48 \cdot 13\,734 = 6\,592,3 \text{ N}$$

$$\alpha = \arctan u = \arctan 0,12 = 6,84^\circ$$

Iz sume momenata oko točke A na horizontalnoj podlozi dobije se udaljenost stražnje osovine od težišta vozila:

$$\sum M_A = G_{Np} \cdot l - G \cdot l_z = 0$$

$$l_z = \frac{G_{Np}}{G} \cdot l = 0,52 l = 0,52 \cdot 2,8 = 1,456 \text{ m}$$

Na sličan način dobije se i udaljenost prednje osovine od težišta vozila:

$$\sum M_B = -G_{Nz} \cdot l + G \cdot l_p = 0$$

$$l_p = \frac{G_{Nz}}{G} \cdot l = 0,48 l = 0,48 \cdot 2,8 = 1,344 \text{ m}$$

Sada se mogu odrediti osovinske reakcije vozila na nizbrdici:

$$\sum M_A = 0$$

$$-G \cos \alpha \cdot l_z - G \sin \alpha \cdot h_T + G_{Np} \cdot l = 0$$

$$G_{Np} = \frac{G \cos \alpha \cdot l_z + G \sin \alpha \cdot h_T}{l} = \frac{13\,734 \cdot \cos 6,84 \cdot 1,456 + 13\,734 \cdot \sin 6,84 \cdot 0,56}{2,8}$$

$$G_{Np} = 7418 \text{ N}$$

$$\sum M_B = 0$$

$$-G_{Nz} \cdot l + G \cos \alpha \cdot l_p - G \sin \alpha \cdot h_T = 0$$

$$G_{Nz} = \frac{G \cos \alpha \cdot l_p - G \sin \alpha \cdot h_T}{l} = \frac{13\,734 \cdot \cos 6,84 \cdot 1,344 - 13\,734 \cdot \sin 6,84 \cdot 0,56}{2,8}$$

$$G_{Nz} = 6218 \text{ N}$$

3. JEDNADŽBA KRETANJA VOZILA

3.1. Kolika ukupna sila otpora djeluje na vozilo mase 1 t koje se kreće brzinom 72 km/h i ubrzanjem od $1,3 \text{ m/s}^2$ (faktor utjecaja rotirajućih masa je 1,06) po cesti s uzdužnim padom od 2% (nizbrdica). Zadano: čelna površina vozila $1,95 \text{ m}^2$; faktor otpora kotrljanja 0,022; faktor otpora zraka 0,36; gustoća zraka $1,3 \text{ kg/m}^3$.

Rješenje:

Na vozilo uvijek djeluju temeljni otpori kretanja, a to su sila otpora kotrljanja i sila otpora zraka. Sila otpora kretanja je posljedica deformacije pneumatika i podloge po kojem se vozilo kreće, a sila otpora zraka je posljedica kretanja vozila kroz fluid (zrak). Pri jako malim brzinama, što ovdje nije slučaj, sila otpora zraka se može zanemariti. Temeljne sile otpora se rješavaju prema poznatim izrazima:

$$F_k = m g f = 1000 \cdot 9,81 \cdot 0,022 = 215,8 \text{ N}$$

$$F_z = C_x \rho_z \frac{v_{72}^2}{2} A = 0,36 \cdot 1,3 \cdot \frac{\left(\frac{72}{3,6}\right)^2}{2} \cdot 1,95 = 182,5 \text{ N}$$

Ovisno o režimima kretanja i uvjetima na cesti, na vozilo mogu djelovati dodatni otpori poput sile otpora uspona, inercije ili priključnog vozila. Ponekad se sila otpora kotrljanja i sila otpora uspona, gledaju zajedno kao sila otpora puta. Sila otpora uspona je komponenta težine paralelna s podlogom. U ovom slučaju, budući da se vozilo kreće po nizbrdici (negativan uspon), sila otpora uspona djeluje u smjeru gibanja i potiče gibanje umjesto da mu se suprotstavlja. Zbog toga sila „otpora uspona“ ima negativan predznak i smanjuje ukupne otpore koji djeluju na vozilo.

$$F_u = m g u = 1000 \cdot 9,81 \cdot (-0,02) = -196,2 \text{ N}$$

Kako se vozilo ne kreće konstantnom brzinom, već ubrzava, kretanju se opire sila otpora inercije koja se računa prema drugom Newtonovom zakonu i uvećana je za faktor rotirajućih masa. Kada bi vozilo usporavalo, što ovdje nije slučaj, sila otpora inercije bi djelovala u smjeru gibanja i imala negativan predznak.

$$F_i = m a \delta = 1000 \cdot 1,3 \cdot 1,06 = 1378 \text{ N}$$

Ukupna sila otpora je zbroj svih sila otpora koje djeluju na vozilo.

$$F_o = F_k + F_z + F_u + F_i = 215,8 + 182,5 - 196,2 + 1378 = 1580,1 \text{ N}$$

3.2. Za vozilo mase 1200 kg koje se kreće po cesti uspona 5% potrebno je skicirati i kotirati dijagrame ovisnosti sile otpora kotrljanja o brzini, sile otpora zraka o brzini, sile otpora uspona o brzini, te ukupne sile otpora o brzini za brzine 0 km/h, 40 km/h, 80 km/h, 120 km/h, 160 km/h i 200 km/h.

Faktor otpora kotrljanja se povećava s brzinom prema formuli:

$$f = f_0 + C_1 \cdot v + C_2 \cdot v^4, v \text{ [km/h]}, \text{ faktor otpora kotrljanja za } v = 0, f_0 = 0,02,$$

a faktori C_1 i C_2 iznose: $C_1 = 5,42 \cdot 10^{-6}$, $C_2 = 1,05 \cdot 10^{-11}$.

Za vozilo je zadano: faktor aerodinamičnosti 0,35; čelna površina vozila $2,1 \text{ m}^2$; gustoća zraka $1,2 \text{ kg/m}^3$.

Rješenje¹:

$$m = 1200 \text{ kg}$$

Težina automobila:

$$u = 5\% = 0,05$$

$$G = m \cdot g = 1200 \cdot 9,81 = 11\,772 \text{ N}$$

$$f_0 = 0,02$$

$$C_1 = 5,42 \cdot 10^{-6}$$

$$C_2 = 1,05 \cdot 10^{-11}$$

$$A = 2,1 \text{ m}^2$$

Za izradu dijagrama, potrebno je izračunati tražene sile otpora pri zadanim brzinama. Rezultate je najpreglednije prikazati tablično:

$$\rho_z = 1,2 \text{ kg/m}^3$$

$$C_x = 0,35$$

$v \text{ [km/h]}$	f	$F_k \text{ [N]}$	$F_z \text{ [N]}$	$F_u \text{ [N]}$	$F_o \text{ [N]}$
0					
40					
80					
120					
160					
200					

Da bi se izračunala sila otpora kotrljanja potrebno je prvo izračunati faktor otpora kotrljanja za zadane brzine. Zadano je da se faktor otpora kotrljanja mijenja s brzinom prema zakonu:

$$f = f_0 + C_1 \cdot v + C_2 \cdot v^4$$

¹ Isti zadatak se može riješiti i pomoću MS Excel programa. Podloge za rješavanje zadatka nalaze se na e-learning stranicama kolegija.

Uz izraz je zadano da se brzina uvrštava u km/h. Dakle, za brzinu $v = 0$ km/h, f se računa:

$$f(0) = f_0 + C_1 \cdot v + C_2 \cdot v^4$$

$$f(0) = 0,02 + 5,42 \cdot 10^{-6} \cdot 0 + 1,05 \cdot 10^{-11} \cdot 0^4$$

$$f(0) = 0,02$$

Za brzinu $v = 40$ km/h, faktor otpora kotrljanja f se računa:

$$f(40) = f_0 + C_1 \cdot v + C_2 \cdot v^4$$

$$f(40) = 0,02 + 5,42 \cdot 10^{-6} \cdot 40 + 1,05 \cdot 10^{-11} \cdot 40^4$$

$$f(40) = 0,0202$$

Rezultati za sve brzine izražavaju se tablično.

v [km/h]	f	F_k [N]	F_z [N]	F_u [N]	F_o [N]
0	0,0200				
40	0,0202				
80	0,0209				
120	0,0228				
160	0,0277				
200	0,0379				

Sila otpora kotrljanja se računa prema izrazu:

$$F_k = m \cdot g \cdot f = G \cdot f$$

Pri tome treba paziti da se za svaku traženu brzinu uvrsti odgovarajući faktor otpora kotrljanja

Dakle, za brzinu $v = 0$ km/h, $f = 0,02$, pa se F_k računa kao:

$$F_k(0) = G \cdot f$$

$$F_k(0) = 11772 \cdot 0,02$$

$$F_k(0) = 235,4 \text{ N}$$

Za brzinu $v = 40$ km/h, $f = 0,0202$, pa se F_k računa kao:

$$F_k(40) = G \cdot f$$

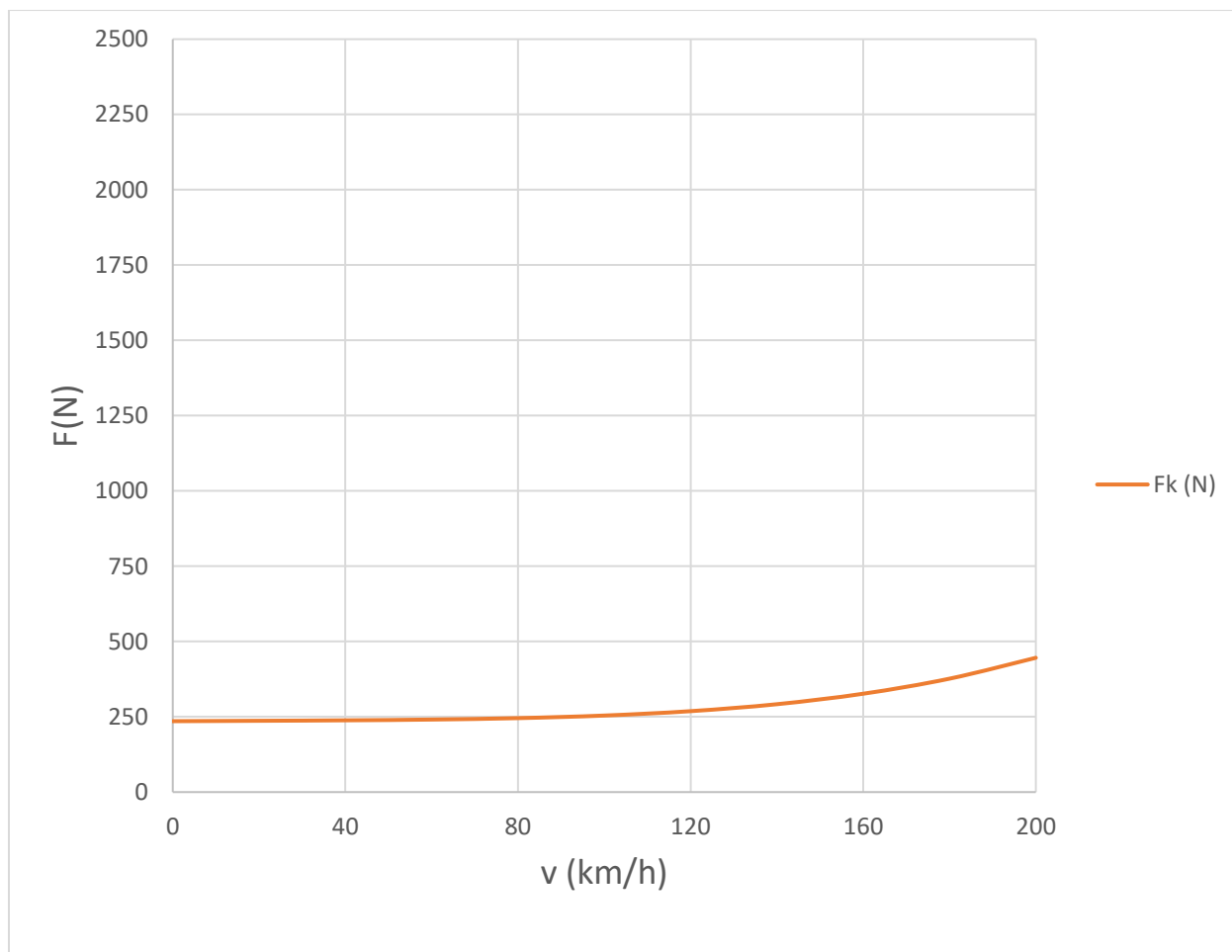
$$F_k(40) = 11772 \cdot 0,0202$$

$$F_k(40) = 238,3 \text{ N}$$

I tako dalje za sve zadane brzine. Rezultate upisati u tablicu.

v [km/h]	f	F_k [N]	F_z [N]	F_u [N]	F_o [N]
0	0,0200	235,4			
40	0,0202	238,3			
80	0,0209	245,6			
120	0,0228	268,7			
160	0,0277	326,7			
200	0,0379	446,0			

Na temelju dobivenih podataka može se nacrtati dijagram ovisnosti sile otpora kotrljanja o brzini:



Slika 14

Iz dijagrama se vidi da sila otpora kotrljanja, za ovaj slučaj, raste sporo do brzine od 100 km/h, a nakon toga počinje naglo rasti. Zato se za manje brzine, radi jednostavnosti, sila otpora kotrljanja često može smatrati konstantom.

Sila otpora zraka se računa prema izrazu (brzina se uvrštava u m/s):

$$F_z = C_x \cdot \rho_z \cdot \frac{v^2}{2} \cdot A$$

Za različite brzine, u izrazu se mijenja jedino v dok su ostale vrijednosti konstantne. Budući da treba računati silu otpora zraka za šest različitih brzina (0, 40, 80, 120, 160 i 200 km/h), da se smanji obujam posla formulu bi bilo poželjno pojednostavniti.

$$F_z = \frac{1}{2} \cdot C_x \cdot \rho_z \cdot A \cdot v^2$$

$$F_z = \frac{1}{2} \cdot 0,35 \cdot 1,2 \cdot 2,1 \cdot v^2$$

$$F_z = 0,441 \cdot v^2$$

Budući da brzina treba biti uvrštena u m/s, pretvorba mjernih jedinica se može uvrstiti izravno u izraz:

$$F_z = 0,441 \cdot \left(v \cdot \frac{1000}{3600}\right)^2$$

$$F_z = 0,441 \cdot \left(v \cdot \frac{1}{3,6}\right)^2$$

$$F_z = 0,441 \cdot \left(\frac{v}{3,6}\right)^2$$

Dakle, za brzinu $v = 0$ km/h, F_z se računa kao:

$$F_z(0) = 0,441 \cdot \left(\frac{v}{3,6}\right)^2$$

$$F_z(0) = 0,441 \cdot \left(\frac{0}{3,6}\right)^2$$

$$F_z(0) = 0$$

Za brzinu $v = 40$ km/h, F_z se računa kao:

$$F_z(40) = 0,441 \cdot \left(\frac{v}{3,6}\right)^2$$

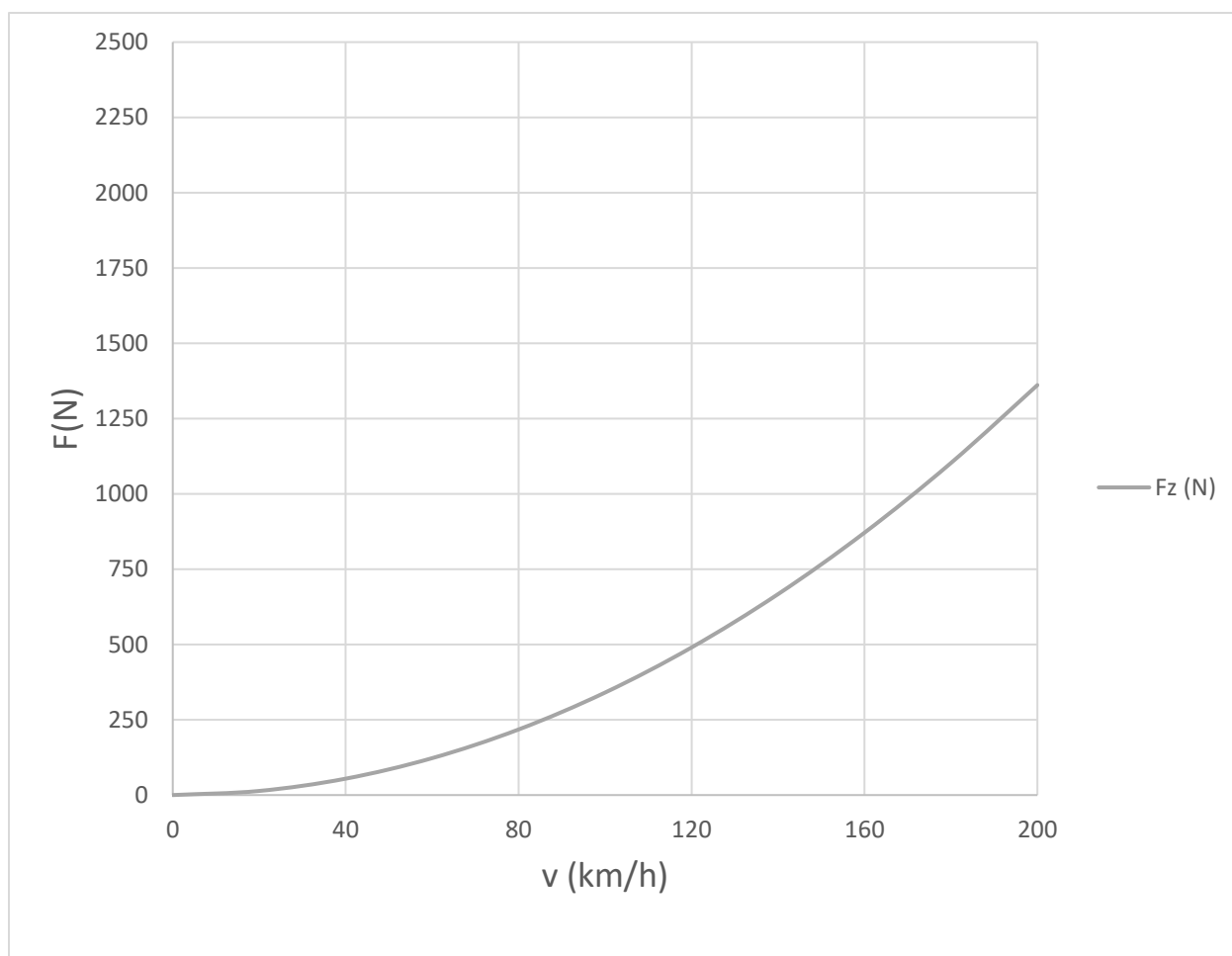
$$F_z(40) = 0,441 \cdot \left(\frac{40}{3,6}\right)^2$$

$$F_z(40) = 54,4 \text{ N}$$

I tako dalje za sve zadane brzine. Rezultate upisati u tablicu.

v [km/h]	f	F_k [N]	F_z [N]	F_u [N]	F_o [N]
0	0,0200	235,4	0,0		
40	0,0202	238,3	54,4		
80	0,0209	245,6	217,8		
120	0,0228	268,7	490,0		
160	0,0277	326,7	871,1		
200	0,0379	446,0	1361,1		

Na temelju dobivenih podataka može se nacrtati dijagram ovisnosti sile otpora kotrljanja o brzini:



Slika 15

Sila otpora uspona se računa prema izrazu:

$$F_u = m \cdot g \cdot u = G \cdot u$$

Iz izraza je očito da sila otpora uspona ne ovisi o brzini kretanja automobila, te će za sve zadane brzine biti jednaka.

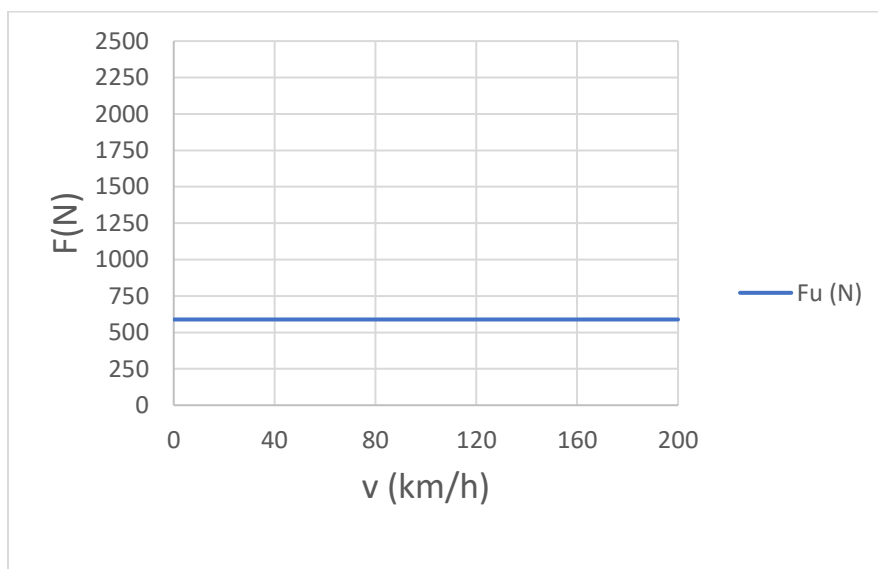
$$F_u = G \cdot u$$

$$F_u = 11\,772 \cdot 0,05$$

$$F_u = 588,6 \text{ N}$$

Rezultati se upisuju u tablicu, a dijagram će biti horizontalni pravac (konstanta).

v [km/h]	f	F_k [N]	F_z [N]	F_u [N]	F_o [N]
0	0,0200	235,4	0,0	588,6	
40	0,0202	238,3	54,4	588,6	
80	0,0209	245,6	217,8	588,6	
120	0,0228	268,7	490,0	588,6	
160	0,0277	326,7	871,1	588,6	
200	0,0379	446,0	1361,1	588,6	



Slika 16

Ukupna sila otpora je zbroj svih sila otpora i računa se prema izrazu:

$$F_o = F_k + F_z + F_u$$

Za brzinu $v = 0$, ukupna sila otpora iznosi

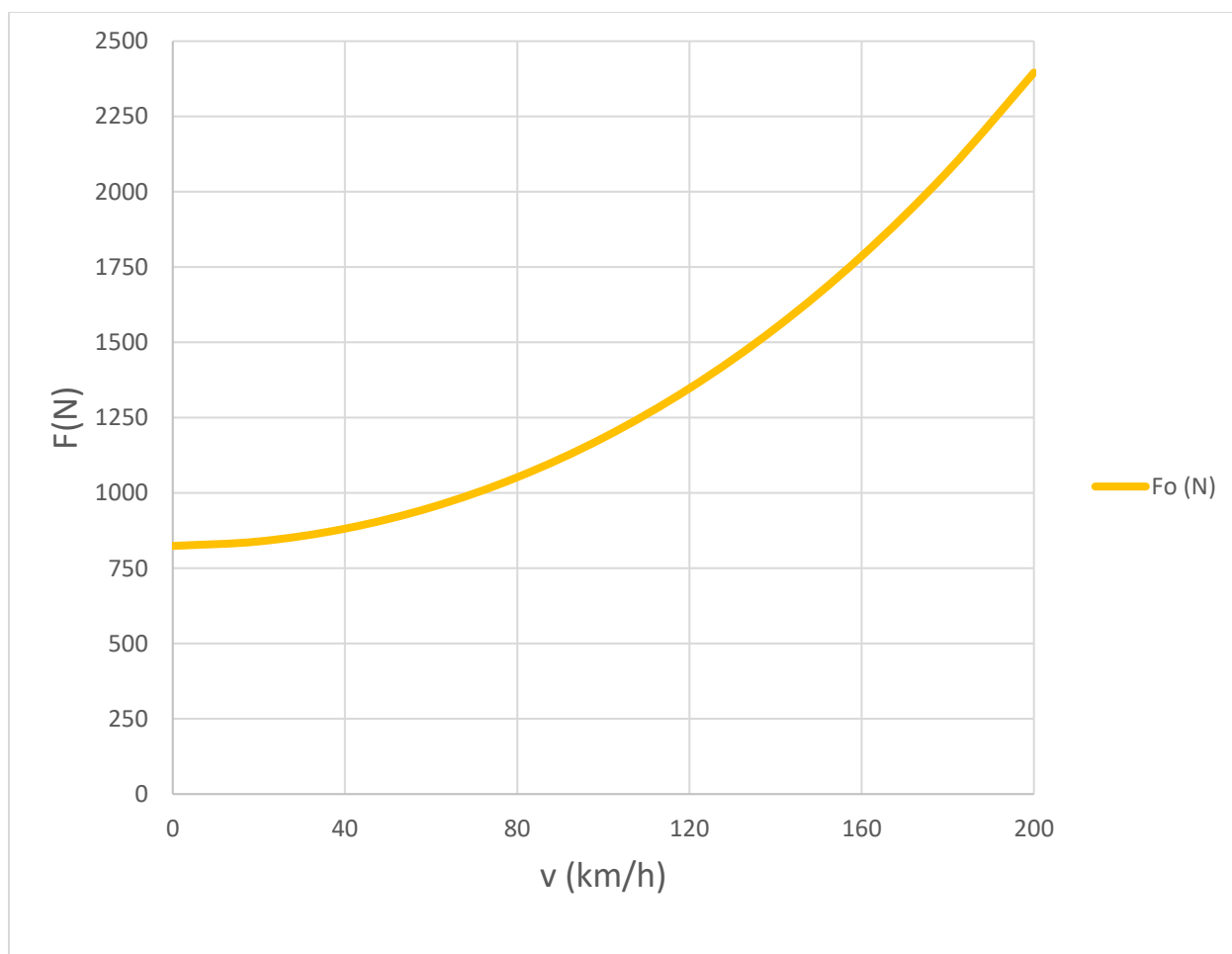
$$F_o(0) = 235,4 + 0,0 + 588,6 = 824,0 \text{ N}$$

Za brzinu $v = 40 \text{ km/h}$, ukupna sila otpora iznosi

$$F_o(40) = 238,3 + 54,4 + 588,6 = 881,4 \text{ N}$$

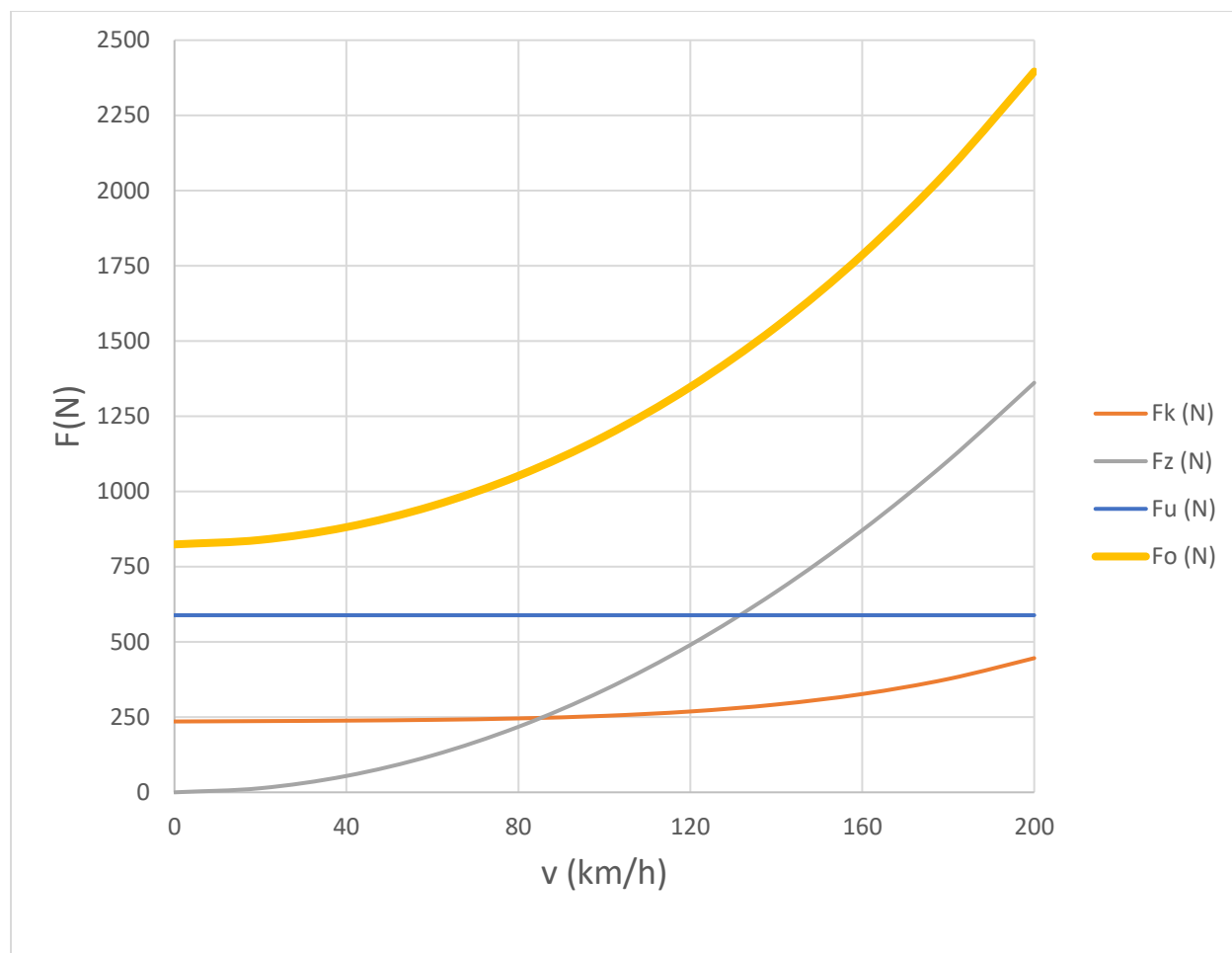
I tako dalje za svaku zadanu brzinu.

$v \text{ [km/h]}$	f	$Fk \text{ [N]}$	$Fz \text{ [N]}$	$Fu \text{ [N]}$	$Fo \text{ [N]}$
0	0,0200	235,4	0,0	588,6	824,0
40	0,0202	238,3	54,4	588,6	881,4
80	0,0209	245,6	217,8	588,6	1052,0
120	0,0228	268,7	490,0	588,6	1347,3
160	0,0277	326,7	871,1	588,6	1786,4
200	0,0379	446,0	1361,1	588,6	2395,7



Slika 17

Konačno, svi traženi dijagrami prikazani na jednom mjestu će izgledati ovako:



Slika 18

3.3. Za vozilo mase 1400 kg koje se kreće po cesti uspona 3% potrebno je skicirati i kotirati dijagrame ovisnosti sile otpora kotrljanja o brzini, sile otpora zraka o brzini, sile otpora uspona o brzini, te ukupne sile otpora o brzini za brzine 0 km/h, 40 km/h, 80 km/h, 120 km/h, 160 km/h i 200 km/h.

Faktor otpora kotrljanja se povećava s brzinom prema formuli:

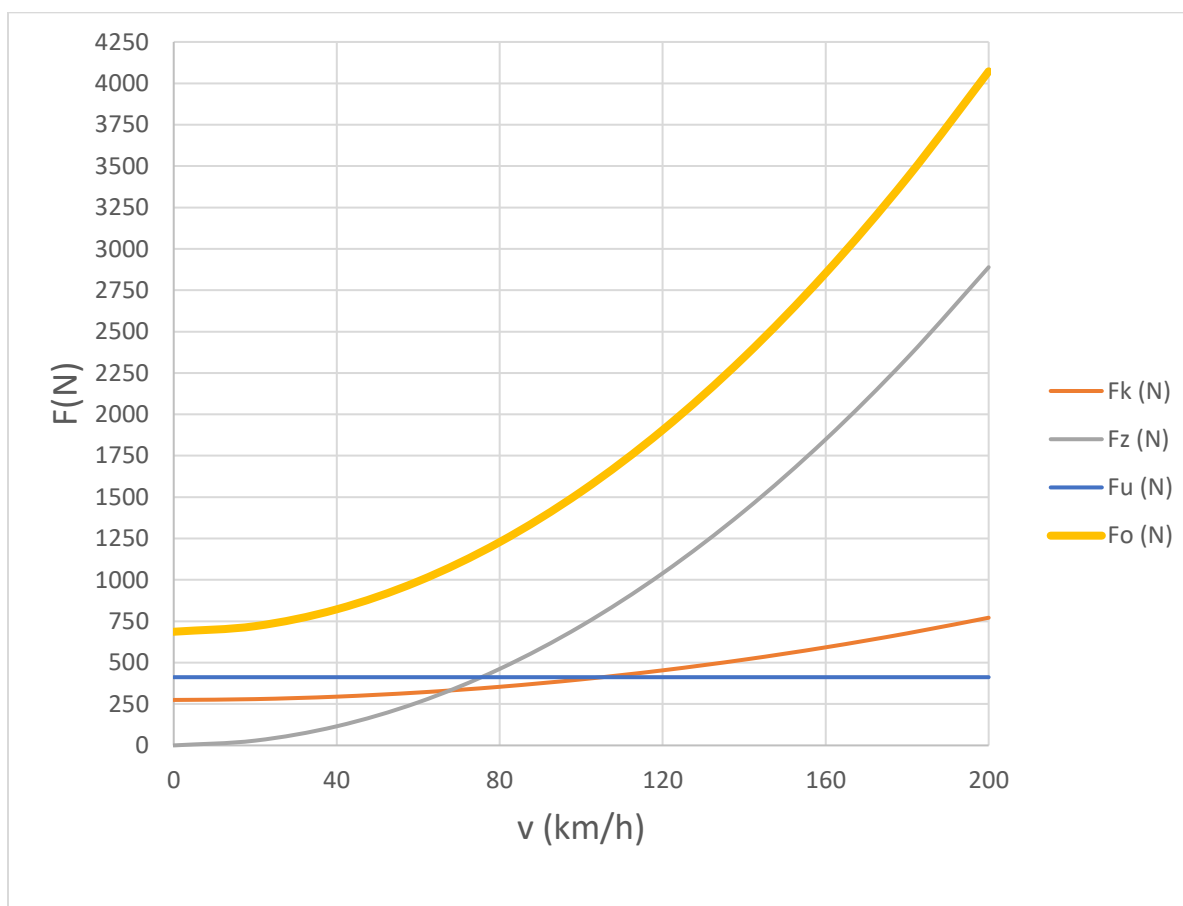
$f = f_0(1 + C \cdot v^2)$, (brzina se uvrštava u km/h), faktor otpora kotrljanja za $v = 0$,

$f_0 = 0,02$, ako je faktor $C = 4,52 \cdot 10^{-5}$.

Za vozilo je zadano: faktor aerodinamičnosti 0,65; čelna površina vozila $2,4 \text{ m}^2$; gustoća zraka $1,2 \text{ kg/m}^3$.

Rješenje:

v [km/h]	f	F_k [N]	F_z [N]	F_u [N]	F_o [N]
0	0,0200	274,7	0,0	412,0	686,7
40	0,0214	294,5	115,6	412,0	822,1
80	0,0258	354,1	462,2	412,0	1228,4
120	0,0330	453,5	1040,0	412,0	1905,5
160	0,0431	592,5	1848,9	412,0	2853,4
200	0,0562	771,3	2888,9	412,0	4072,2



Slika 19

3.4. Vozilo snage motora $P_M = 60$ kW i mase 1500 kg kreće se maksimalnom brzinom od 120 km/h po cesti uspona 5%. Koliki su gubici u transmisiji? Koliki postotak snage se iskorištava za savladavanje svake sile otpora? Zadano: faktor aerodinamičnosti 0,36; čelna površina vozila 2,55 m²; faktor otpora kotrljanja 0,018; gustoća zraka 1,2 kg/m³.

Rješenje:

Najprije je potrebno izračunati sile otpora kako bi se izračunala ostvarena snaga na kotačima vozila.

$$F_k = m g f = 1500 \cdot 9,81 \cdot 0,018 = 264,9 \text{ N}$$

$$F_z = C_x \rho_z \frac{v_{120}^2}{2} A = 0,36 \cdot 1,2 \cdot \frac{\left(\frac{120}{3,6}\right)^2}{2} \cdot 2,55 = 612 \text{ N}$$

$$F_u = m g u = 1500 \cdot 9,81 \cdot 0,05 = 735,8 \text{ N}$$

$$F_o = F_k + F_z + F_u = 264,9 + 612 + 735,8 = 1612,7 \text{ N}$$

Da bi se vozilo moglo kretati, vučna sila (F_v) treba savladati sve sile otpora, tj. treba biti jednaka ukupnoj sili otpora (F_o). Jednadžba koja izražava jednakost vučne sile i sile otpora ($F_v = F_o$) naziva se jednadžba kretanja vozila.

Snaga koja se ostvaruje na kotačima računa se kao:

$$P_k = F_v \cdot v$$

Budući da su vuča sila i ukupna sila otpora jednake ($F_v = F_o$) izraz se može zapisati kao:

$$P_k = F_o \cdot v = 1612,7 \cdot \left(\frac{120}{3,6}\right) = 53\,757 \text{ W}$$

Faktor učinkovitosti motora je omjer ostvarene snage na kotačima vozila i snage motora.

$$\eta = \frac{P_k}{P_M} = \frac{53\,757}{60\,000} = 0,896 = 89,6\%$$

Što znači da se na savladavanje gubitaka u prijenosu iskorištava, odnosno troši:

$$P_{gub} = 100\% - 89,6\% = 10,4\%$$

Da bi se izračunalo koliki se postotak snage iskorištava za savladavanje svake sile otpora, potrebno je izračunati snagu koja se troši na savladavanje sile otpora, tako da se pomnoži s trenutnom brzinom, pa je podijeliti sa snagom motora.

Za savladavanje sile otpora kotrljanja iskorištava se:

$$P_{kot} = F_k \cdot v_{120} = 264,9 \cdot \left(\frac{120}{3,6}\right) = 8\,830 \text{ W}$$

$$\frac{P_{kot}}{P_M} = \frac{8\,830}{60\,000} = 0,147 = 14,7\%$$

Za savladavanje sile otpora zraka iskorištava se:

$$P_z = F_z \cdot v_{120} = 612 \cdot \left(\frac{120}{3,6}\right) = 20\,400 \text{ W}$$

$$\frac{P_z}{P_M} = \frac{20\,400}{60\,000} = 0,34 = 34\%$$

Za savladavanje sile otpora uspona iskorištava se:

$$P_u = F_u \cdot v_{120} = 735,8 \cdot \left(\frac{120}{3,6}\right) = 24\,527 \text{ W}$$

$$\frac{P_z}{P_M} = \frac{24\,527}{60\,000} = 0,409 = 40,9\%$$

Ukupna snaga motora iskorištava se za savladavanje gubitaka u transmisiji i sile otpora kretanja, s tim da se u ovom slučaju 10,4% snage iskorištava za savladavanje gubitka u transmisiji, 14,7% na savladavanje sile otpora kotrljanja, 34% na savladavanje sile otpora zraka i 40,9% na savladavanje sile otpora uspona.

3.5. Vozilo snage motora $P = 85 \text{ kW}$ i mase 1470 kg kreće se brzinom od 72 km/h po cesti uspona 7% . Kolika je rezerva snage za ubrzanje? Zadano: faktor aerodinamičnosti $0,36$; čelna površina vozila $2,55 \text{ m}^2$; faktor otpora kotrljanja $0,02$; gustoća zraka $1,2 \text{ kg/m}^3$; gubici u transmisiji su 10% .

Rješenje:

Budući da se automobil ne kreće maksimalnom brzinom, odnosno ne savladava maksimalni mogući uspon, ne iskorištava se potpuna snaga motora na savladavanje otpora. Efektivna snaga koja se iskorištava na savladavanje otpora se računa kao:

$$P_e = P_{gub} + P_k$$

Za gubitke u transmisiji iskorištava se 10% od ukupne snage motora što iznosi:

$$P_{gub} = P_M \cdot \eta = 85\,000 \cdot 0,1 = 8\,500\, W$$

Kao i inače, da bi se izračunala snaga na kotačima, potrebno je izračunati sve sile otpora koje djeluju na vozilo:

$$F_k = m \cdot g \cdot f = 1470 \cdot 9,81 \cdot 0,02 = 288,4\, N$$

$$F_z = C_x \cdot \rho_z \cdot \frac{v_{72}^2}{2} \cdot A = 0,36 \cdot 1,2 \cdot \frac{\left(\frac{72}{3,6}\right)^2}{2} \cdot 2,55 = 220,3\, N$$

$$F_u = m \cdot g \cdot u = 1470 \cdot 9,81 \cdot 0,07 = 1009,4\, N$$

$$F_o = F_k + F_z + F_u = 288,4 + 220,3 + 1009,4 = 1518,1\, N$$

$$P_k = F_o \cdot v = 1518,1 \cdot 20 = 30\,362\, W$$

Dakle, efektivna snaga motora koja se iskorištava za savladavanje otpora kretanju i gubitaka u prijenosu iznosi:

$$P_e = P_{gub} + P_k = 8\,500 + 30\,362 = 38\,862\, W$$

Što znači da je rezerva snage za ubrzanje razlika maksimalne snage i efektivne snage motora:

$$P_i = P_M - P_e = 85\,000 - 38\,862 = 46\,138\, W$$

3.6. Koliki uspon može savladati vozilo mase 1422 kg brzinom od 110 km/h ako je snaga motora 75 kW, a gubitci u transmisiji 11%. Zadano: faktor aerodinamičnosti 0,48; čelna površina vozila 2,95 m²; faktor otpora kotrljanja 0,014; gustoća zraka 1,2 kg/m³.

Rješenje:

Snaga koja se može iskoristiti na kotačima je umanjena od snage motora za iznos gubitaka u transmisiji:

$$P_k = P_M \cdot \eta = 75\,000 \cdot (1 - 0,11) = 66\,750\, W$$

Što znači da vozilo pri brzini od 110 km/h može savladati ukupnu silu otpora:

$$P_k = F_o \cdot v$$

$$F_o = \frac{P_k}{v} = \frac{66\,750}{\left(\frac{110}{3,6}\right)} = 2\,184,5 \text{ N}$$

Kada se od ukupne sile otpora oduzmu poznate sile otpora, preostaje koliko najviše može iznositi sila otpora uspona:

$$F_k = m g f = 1422 \cdot 9,81 \cdot 0,014 = 195,3 \text{ N}$$

$$F_z = C_x \rho_z \frac{v^2}{2} A = 0,48 \cdot 1,2 \cdot \frac{\left(\frac{110}{3,6}\right)^2}{2} \cdot 2,95 = 793,2 \text{ N}$$

$$F_o = F_k + F_z + F_u$$

$$F_u = F_o - (F_k + F_z) = 2184,5 - (195,3 + 793,2) = 1196 \text{ N}$$

$$u = \frac{F_u}{m g} = \frac{1196}{1422 \cdot 9,81} = 0,0857 = 8,57\%$$

3.7. Vozilo mase 1447,5 kg se kreće maksimalnom brzinom 118 km/h po cesti uspona 10%. Koliko ubrzanje može postići ovo vozilo na cesti uspona 4%, ako se kreće brzinom 90 km/h. Za vozilo je zadano: faktor otpora kotrljanja 0,023; faktor otpora zraka 0,39; čelna površina vozila 2,45 m²; gustoća zraka 1,2 kg/m³; utjecaj rotirajućih masa 1,05.

Rješenje:

Iz zadanih podataka za prvi slučaj kretanja vozila ($v = 118 \text{ km/h}$) moguće je izračunati kolika snaga se ostvaruje na pogonskim kotačima vozila. Snaga na pogonskim kotačima se računa kao umnožak ukupne vučne sile i brzine kretanja vozila:

$$P_k = F_v \cdot v$$

Budući da je prema jednadžbi kretanja vozila vučna sila jednaka ukupnoj sili otpora ($F_v = F_o$), izraz se može zapisati:

$$P_k = F_o \cdot v$$

Kako je brzina vozila poznata, potrebno je izračunati ukupnu vučnu silu kretanja koja je jednaka zbroju svih sila otpora koji se javljaju u prvom slučaju, a to su sila otpora kotrljanja i sila otpora zraka kao temeljni otpori kretanju, te sila otpora uspona jer se vozilo kreće po cesti s uzdužnim nagibom od 10%. Sila otpora inercije se ne suprotstavlja gibanju, jer se u prvom slučaju vozilo kreće konstantnom (maksimalnom) brzinom.

Ukupna sila otpora u prvom slučaju računa kao:

$$F_{o\ 118} = F_{k\ 118} + F_{z\ 118} + F_{u\ 118}$$

Budući da nema posebne napomene, faktor otpora kotrljanja se smatra konstantnim (vozilo se kreće u svim uvjetima po istoj cesti i s istim pneumaticima), što znači da je sila otpora kotrljanja jednaka pri svim brzinama, a računa se kao:

$$F_{k\ 118} = m g f = 1447,5 \cdot 9,81 \cdot 0,023 = 326,6\ N$$

Sila otpora zraka se računa kao:

$$F_{z\ 118} = C_x \rho_z \frac{v_{118}^2}{2} A = 0,39 \cdot 1,2 \cdot \frac{\left(\frac{118}{3,6}\right)^2}{2} \cdot 2,45 = 615,9\ N$$

Vozilo se u prvom slučaju kreće po usponu od 10%, a sila otpora uspona se računa kao:

$$F_{u\ 118} = m g u = 1447,5 \cdot 9,81 \cdot 0,1 = 1420\ N$$

Dakle, ukupna sila otpora je:

$$F_{o\ 118} = F_{k\ 118} + F_{z\ 118} + F_{u\ 118} = 326,6 + 615,9 + 1420 = 2362,5\ N$$

Iz čega se može izračunati snaga na pogonskim kotačima vozila:

$$P_k = F_{o\ 118} \cdot v_{118} = 2362,2 \cdot \frac{118}{3,6} = 77\ 438\ W$$

U drugom slučaju, vozilo se kreće ubrzano, po cesti s uzdužnim nagibom od 4%, a trenutna brzina vozila je 90 km/h. Što znači da na vozilo djeluju temeljni otpori (sila otpora kotrljanja i sila otpora zraka) koji se uvijek javljaju, te dopunski otpori, sila otpora uspona (jer se vozilo kreće po usponu)

i sila otpora inercije (jer se vozilo kreće ubrzano). Dakle, ukupna sila otpora je zbroj svih sila otpora:

$$F_{o\ 90} = F_{k\ 90} + F_{z\ 90} + F_{u\ 90} + F_{i\ 90}$$

Ukupna sila otpora može se izravno izračunati iz omjera snage na pogonskim kotačima vozila i trenutne brzine vozila, budući da je snaga na kotačima konstanta i iznosi 77 438 W kao što je izračunato iz prvog slučaja.

$$P_k = F_{o\ 90} \cdot v_{90}$$

$$F_{o\ 90} = \frac{P_k}{v_{90}} = \frac{77\ 438}{\frac{90}{3,6}} = 3097,5\ N$$

Očekivano je da vozilo savladava veću ukupnu silu otpora nego u prvom slučaju budući da se kreće manjom brzinom.

Ubrzanje vozila može se izračunati iz izraza za silu otpora inercije:

$$F_i = m a \delta$$

$$a = \frac{F_i}{m \delta}$$

Iznos sile otpora inercije se može dobiti oduzimanjem poznatih sila otpora od ukupne sile otpora:

$$F_{i\ 90} = F_{o\ 90} - F_{k\ 90} - F_{z\ 90} - F_{u\ 90}$$

Kao što je već rečeno, ako nije posebno napomenuto, sila otpora kotrljanja je jednaka pri svim brzinama kretanja vozila:

$$F_{k\ 90} = F_{k\ 118} = m g f = 326,6\ N$$

Sila otpora zraka bit će manja jer se vozilo kreće manjom brzinom:

$$F_{z\ 90} = C_x \rho_z \frac{v_{90}^2}{2} A = 0,39 \cdot 1,2 \cdot \frac{\left(\frac{90}{3,6}\right)^2}{2} \cdot 2,45 = 358,3\ N$$

Sila otpora uspona bit će također manja, jer se vozilo kreće po manjem usponu:

$$F_{u\ 90} = m g u = 1447,5 \cdot 9,81 \cdot 0,04 = 568\ N$$

Sila otpora inercije prema tome jest:

$$F_{i\ 90} = F_{o\ 90} - F_{k\ 90} - F_{z\ 90} - F_{u\ 90} = 3097,5 - 326,6 - 358,3 - 568 = 1844,6\ N$$

Konačno, pri ovim uvjetima voženje, vozilo može postići ubrzanje od:

$$a = \frac{F_i}{m \delta} = \frac{1844,6}{1447,5 \cdot 1,05} = 1,21\ m/s^2$$

3.8. Na horizontalnoj cesti, pri brzini od $v = 90\ km/h$, vozilo mase $m = 1200\ kg$ može postići najveće ubrzanje od $a = 1,2\ m/s^2$. Koliki uspon može savladati ovo vozilo pri brzini $100,8\ km/h$? Za vozilo je zadano: faktor otpora kotrljanja $f = 0,02$; faktor otpora zraka $C_x = 0,35$; gustoća zraka $\rho_z = 1,2\ kg/m^3$, čelna površina vozila $A = 2,1\ m^2$; faktor rotirajućih masa $\delta = 1,06$. Kolika je snaga motora ako je faktor iskoristivosti prijenosa $\eta = 86\%$?

Rješenje:

Da bi se izračunao uspon koji vozilo može savladati pri brzini $100,8\ km/h$, potrebno je prvo izračunati kolika se maksimalna snaga ostvaruje na kotačima vozila.

U prvom slučaju, kada se vozilo kreće brzinom $90\ km/h$, na vozilo djeluje sila otpora kotrljanja, sila otpora zraka i sila otpora inercije. Maksimalna snaga na kotačima se dobije množenjem ukupne sile otpora i brzine kretanja vozila.

$$F_{k\ 90} = m g f = 235,4\ N$$

$$F_{z\ 90} = C_x \rho_z \frac{v_{90}^2}{2} A = 275,6\ N$$

$$F_{i\ 90} = m a \delta = 1526,4\ N$$

$$F_{o\ 90} = F_k + F_z + F_i = 2037,4\ N$$

$$P_k = F_{o\ 90} \cdot v_{90} = 50\ 935\ W$$

Snaga motora dobije se kao omjer snage na kotačima vozila i faktora učinkovitosti transmisije:

$$P_M = \frac{P_k}{\eta} = 59\,226,7\,W$$

U drugom slučaju, kada se vozilo kreće brzinom 100,8 km/h po usponu, na vozilo djeluje sila otpora kotrljanja, sila otpora zraka i sila otpora uspona. Ukupna sila otpora, sila otpora kotrljanja i sila otpora uspona se izračunaju iz poznatih podataka.

$$F_{0\,100,8} = \frac{P_k}{v_{100,8}} = 1819,1\,N$$

$$F_{k\,100,8} = F_{k\,90} = m\,g\,f = 235,4\,N$$

$$F_{z\,100,8} = C_x\,\rho_z\,\frac{v_{100,8}^2}{2}\,A = 345,7\,N$$

Sila otpora uspona se dobije kada se od ukupne sile otpora oduzmu preostale sile otpora koje djeluju na vozilo.

$$F_{u\,100,8} = F_{0\,100,8} - F_{k\,100,8} - F_{z\,100,8} = 1238\,N$$

Iz čega se može izračunati uspon koji vozilo može savladati:

$$u = \frac{F_u}{m\,g} = 0,105 = 10,5\,\%$$

3.9. Na cesti uspona $u = 3\,\%$, vozilo mase $m = 1315\,kg$ postiže maksimalnu brzinu od $v = 160\,km/h$. Koliki uspon može savladati ovo vozilo istom brzinom, ako mu se zbog utovara tereta i putnika masa poveća za $200\,kg$. Za vozilo je zadano: faktor otpora kotrljanja $f = 0,03$; faktor otpora zraka $C_x = 0,32$; gustoća zraka $\rho_z = 1,2\,kg/m^3$, širina vozila $B = 1,73\,m$; visina vozila $H = 1,41\,m$.

Rješenje:

Čelna površina vozila računa se preko izraza:

$$A = 0,9 \cdot B \cdot H = 0,9 \cdot 1,73 \cdot 1,41 = 2,2\,m^2$$

U prvom slučaju, nazovimo slučaj A, vozilo ima masu od 1315 kg.

$$F_{kA} = m_A g f = 387 \text{ N}$$

$$F_{zA} = C_x \rho_z \frac{v^2}{2} A = 834,4 \text{ N}$$

$$F_{uA} = m_A g u = 387 \text{ N}$$

$$F_{oA} = F_{kA} + F_{zA} + F_{uA} = 1608,4 \text{ N}$$

U drugom slučaju, nazovimo slučaj B, vozilo ima masu od 1515 kg, ukupna sila otpora koju vozilo može savladati ostaje jednaka jer se automobil kreće istom brzinom.

$$F_{oB} = F_{oA}$$

Sila otpora zraka ostat će jednaka jer ne ovisi o masi vozila, dok će sila otpora uspona i kotrljanja biti veće zbog povećane mase vozila.

$$F_{kB} = m_B g f = 445,9 \text{ N}$$

$$F_{zB} = F_{zA} = 834,4 \text{ N}$$

Sila otpora uspona u slučaju B može se dobiti oduzimanjem ostalih sila otpora od ukupne sile otpora za ovaj slučaj:

$$F_{oB} = F_{kB} + F_{zB} + F_{uB} = 1608,4 \text{ N}$$

$$F_{uB} = F_{oB} - F_{kB} - F_{zB} = 328,1 \text{ N}$$

$$u = \frac{F_{uB}}{m_B g} = 0,022 = 2,2\%$$

3.10. Koliko ubrzanje može postići vozilo snage motora 85 kW i težine 14 200 N, ako se kreće po cesti uspona 2%, brzinom 112 km/h? Za vozilo je zadano: $C_x = 0,4$; $A = 2,4 \text{ m}^2$; $f = 0,03$; gustoća zraka $\rho_z = 1,2 \text{ kg/m}^3$, utjecaj rotirajućih masa zanemariti ($\delta = 1$). Gubitci u prijenosnom mehanizmu su 12%.

Rješenje:

Ako su zadani gubici u prijenosnom mehanizmu, faktor iskoristivosti prijenosnog mehanizma se dobije kao:

$$\eta = 100\% - \eta_G = 100\% - 12\% = 88\%$$

$$\eta = 0,88$$

Što znači da se na kotačima ostvaruje snaga:

$$P_k = P_M \cdot \eta = 85\,000 \cdot 0,88 = 74\,800\,W$$

Iz čega se može dobiti koliku ukupnu silu otpora vozilo može savladati pri brzini od 112 km/h:

$$P_k = F_{o\,112} \cdot v_{112}$$

$$F_{o\,112} = \frac{P_k}{v_{112}} = 2404,3\,N$$

Temeljne sile otpora se mogu izračunati iz poznatih podataka, s tim da je:

$$G = mg$$

Dakle:

$$F_{k\,112} = G f = 426\,N$$

$$F_{z\,112} = C_x \rho_z \frac{v^2}{2} A = 557,5\,N$$

$$F_{u\,112} = G u = 284\,N$$

Sila otpora inercije prema tome jest:

$$F_{i\,112} = F_{o\,112} - F_{k\,112} - F_{z\,112} - F_{u\,112} = 1136,8\,N$$

Konačno, pri ovim uvjetima voženje, vozilo može postići ubrzanje od:

$$a = \frac{F_i}{m \delta} = 0,785\,m/s^2$$

3.11. Vozilo težine 14 420 N kreće se maksimalnom brzinom od 160 km/h po horizontalnoj cesti.

a) Može li zadano vozilo savladati uspon od 20% brzinom 90 km/h?

b) Može li zadano vozilo postići brzinu od 165 km/h na cesti s uzdužnim padom -1%?

Zadano: faktor aerodinamičnosti 0,36; čelna površina vozila 2,55 m²; faktor otpora kotrljanja 0,02; gustoća zraka 1,2 kg/m³.

Rješenje:

Da bi se ustanovilo može li vozilo savladati zadani uspon, zadanom brzinom, prvo je potrebno izračunati koliku snagu na kotačima ostvaruje ovo vozilo.

$$F_{k\ 160} = m\ g\ f = G\ f = 288,4\ N$$

$$F_{z\ 160} = C_x\ \rho_z\ \frac{v_{160}^2}{2}\ A = 1088\ N$$

$$F_{o\ 160} = F_{k\ 160} + F_{z\ 160} = 1376,4\ N$$

$$P_{k\ max} = F_{o\ 160} \cdot v_{160} = 61\ 173\ W$$

a) Nakon što je izračunata maksimalna snaga koja se ostvaruje na kotačima vozila, potrebno je izračunati potrebnu snagu na kotačima da se ostvari gibanje po usponu 20% brzinom 90 km/h.

$$F_{k\ 90} = F_{k\ 160} = 288,4\ N$$

$$F_{z\ 90} = C_x\ \rho_z\ \frac{v_{90}^2}{2}\ A = 344,3\ N$$

$$F_{u\ 90\ (20\%)} = m\ g\ u = G\ u = 2884\ N$$

$$F_{o\ 90} = F_{k\ 90} + F_{z\ 90} + F_{u\ 90\ (20\%)} = 3516,7\ N$$

$$P_{k\ (potrebno)} = F_{o\ 90} \cdot v_{90} = 87\ 917,5\ W$$

Potrebna snaga za savladavanje zadanog gibanja je veća od maksimalne snage koja se može ostvariti na kotačima vozila, zbog toga se ovo vozilo **ne može** gibati po cesti uspona 20% brzinom 90 km/h.

b) Na sličan način se određuje može li vozilo postići brzinu od 165 km/h na nizbrdici s uzdužnim padom $u = -1\%$. Kada se vozilo kreće po nizbrdici, komponenta težine paralelna s podlogom djeluje u smjeru gibanja, te smanjuje ukupnu silu otpora.

$$F_{k\ 165} = F_{k\ 160} = 288,4\ N$$

$$F_{z\ 165} = C_x \rho_z \frac{v_{165}^2}{2} A = 1157\ N$$

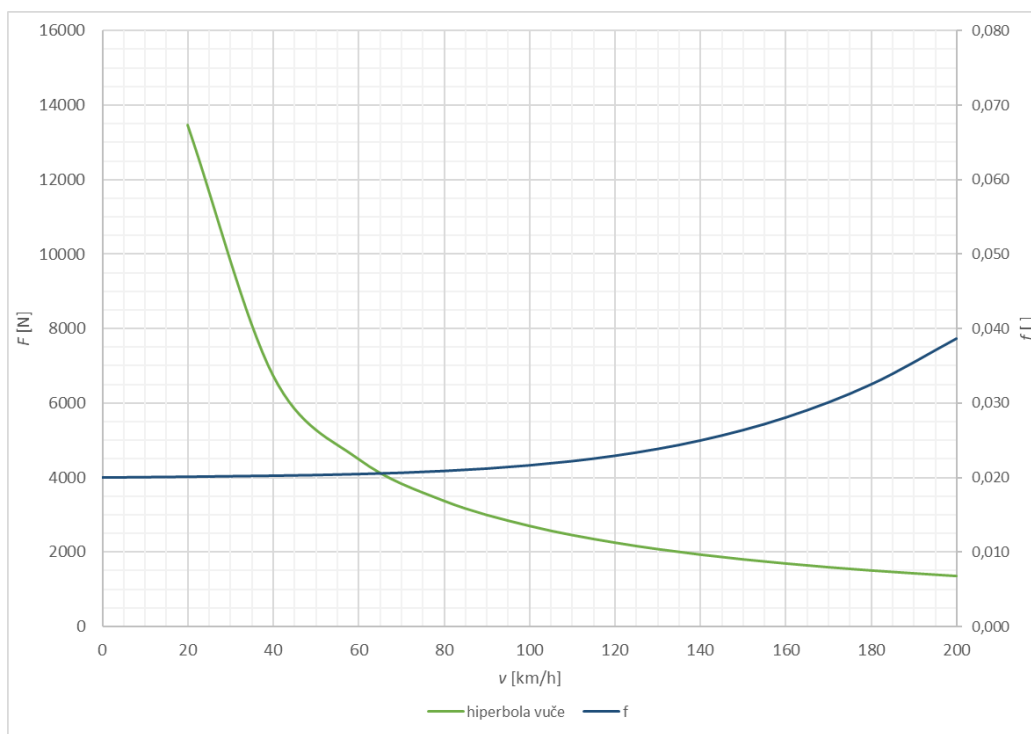
$$F_{u\ 165\ (-1\%)} = m g u = G u = -144,2\ N$$

$$F_{o\ 165} = F_{k\ 165} + F_{z\ 165} + F_{u\ 165\ (-1\%)} = 1301,2\ N$$

$$P_{k\ (potrebno)} = F_{o\ 165} \cdot v_{165} = 59\ 638\ W$$

Potrebna snaga za savladavanje zadanog gibanja je manja od maksimalne snage koja se može ostvariti na kotačima vozila, zbog toga ovo vozilo **može** postići brzinu od 165 km/h na cesti s uzdužnim padom od 1%.

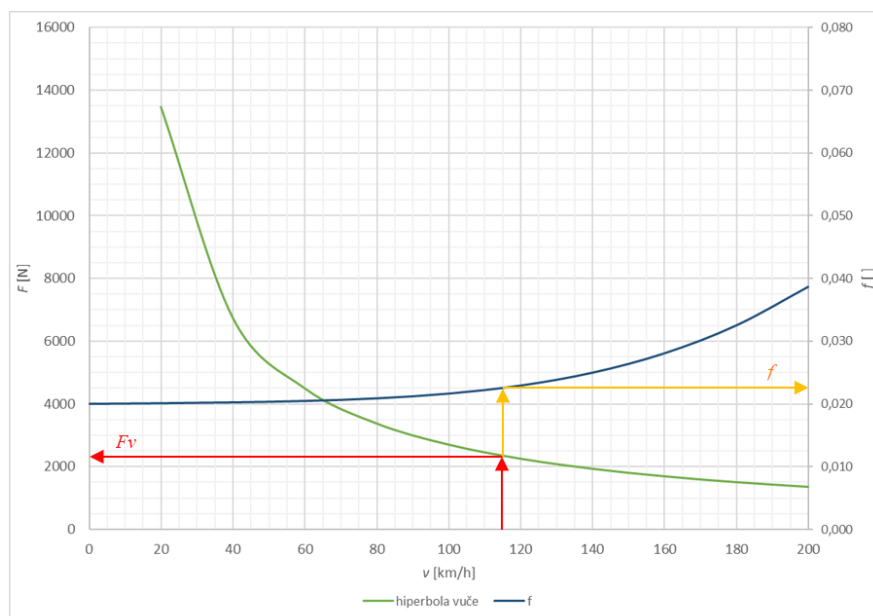
3.12. Za vozilo mase 1530 kg zadan je dijagram ovisnosti vučne sile i faktora otpora kotrljanja o brzini (slika 20). Koliko ubrzanje može postići ovo vozilo ako se kreće brzinom 115 km/h po cesti uspona 5%? Kolika je snaga motora ako su gubici u transmisiji 12%? Za vozilo je zadano: faktor aerodinamičnosti 0,32; čelna površina vozila 2,35 m²; gustoća zraka 1,2 kg/m³ (utjecaj rotirajućih masa zanemariti).



Slika 20

Rješenje:

Iz dijagrama se može očitati vučna sila i faktor otpora kotrljanja pri brzini od 115 km/h:



Slika 21

$$F_v = 2\,400\,N$$

$$f = 0,0225$$

Snaga koja se ostvaruje na kotačima jest:

$$P_k = F_{v\,115} \cdot v_{115} = 76\,667\,W$$

Što znači da je snaga motora:

$$P_M = \frac{P_k}{100\% - \eta_G} = 87\,120\,W$$

Sile otpora pri brzini od 115 km/h i na usponu od 5% iznose:

$$F_{k\,115} = m \, g \, f_{115} = 337,7\,N$$

$$F_{z\,115} = C_x \, \rho_z \, \frac{v_{115}^2}{2} \, A = 460,4\,N$$

$$F_{u\,115} = m \, g \, u = 750,5\,N$$

$$F_{o\ 115} = F_{k\ 115} + F_{z\ 115} + F_{u\ 115} = 1548,6\ N$$

Što znači da za ubrzanje ostaje rezerva:

$$F_{i\ 115} = F_{v\ 115} - F_{o\ 115} = 851,4\ N$$

$$F_{i\ 115} = m\ a\ \delta$$

$$a = \frac{F_i}{m\ \delta} = 0,556\ m/s^2$$

3.13. Za vozilo vrijedi dijagram ovisnosti vučne sile i faktora otpora kotrljanja o brzini (slika 20). Kolika je masa vozila ako se vozilo kreće maksimalnom brzinom od 80 km/h po cesti uspona 20%? Za vozilo je zadano: faktor aerodinamičnosti 0,4; čelna površina vozila 2,45 m²; gustoća zraka 1,3 kg/m³.

Rješenje:

Masa vozila se može dobiti iz jednakosti vučne sile i ukupne sile otpora:

$$F_v = F_o$$

$$F_v = F_k + F_z + F_u$$

$$F_v = m\ g\ f + F_z + m\ g\ u$$

$$m\ g\ f + m\ g\ u = F_v - F_z$$

$$m\ g\ (f + u) = F_v - F_z$$

$$m = \frac{F_v - F_z}{g\ (f + u)}$$

Vučna sila i faktor otpora kotrljanja se mogu očitati iz dijagrama:

$$F_v = 3\ 300\ N$$

$$f = 0,021$$

Dok se sila otpora zraka računa prema poznatom izrazu:

$$F_z = C_x\ \rho_z\ \frac{v^2}{2}\ A = 290,4\ N$$

Masa vozila u konačnici iznosi:

$$m = \frac{F_v - F_z}{g (f + u)} = 1388 \text{ kg}$$

3.14. Za vozilo mase 1200 kg zadan je dijagram ovisnosti vučne sile i faktora otpora kotrljanja o brzini (slika 20). Koliko ubrzanje može postići ovo vozilo ako se kreće brzinom 100 km/h po cesti uspona 4%, ako je sila otpora zraka 60% veća od sile otpora kotrljanja pri toj brzini? Faktor utjecaja rotirajućih masa je $\delta = 1,06$.

Rješenje:

Vučna sila i faktor otpora kotrljanja pri brzini od 100 km/h se mogu očitati iz dijagrama:

$$F_v = 2\,700 \text{ N}$$

$$f = 0,022$$

Sile otpora kotrljanja i uspona su:

$$F_k = m g f = 259 \text{ N}$$

$$F_u = m g u = 471 \text{ N}$$

Sila otpora je 60% veća od sile otpora kotrljanja pri brzini od 100 km/h, što iznosi:

$$F_z = 1,6 \cdot F_k = 414,4 \text{ N}$$

Što znači da je ukupna sila otpora:

$$F_o = F_k + F_z + F_u = 1144,4 \text{ N}$$

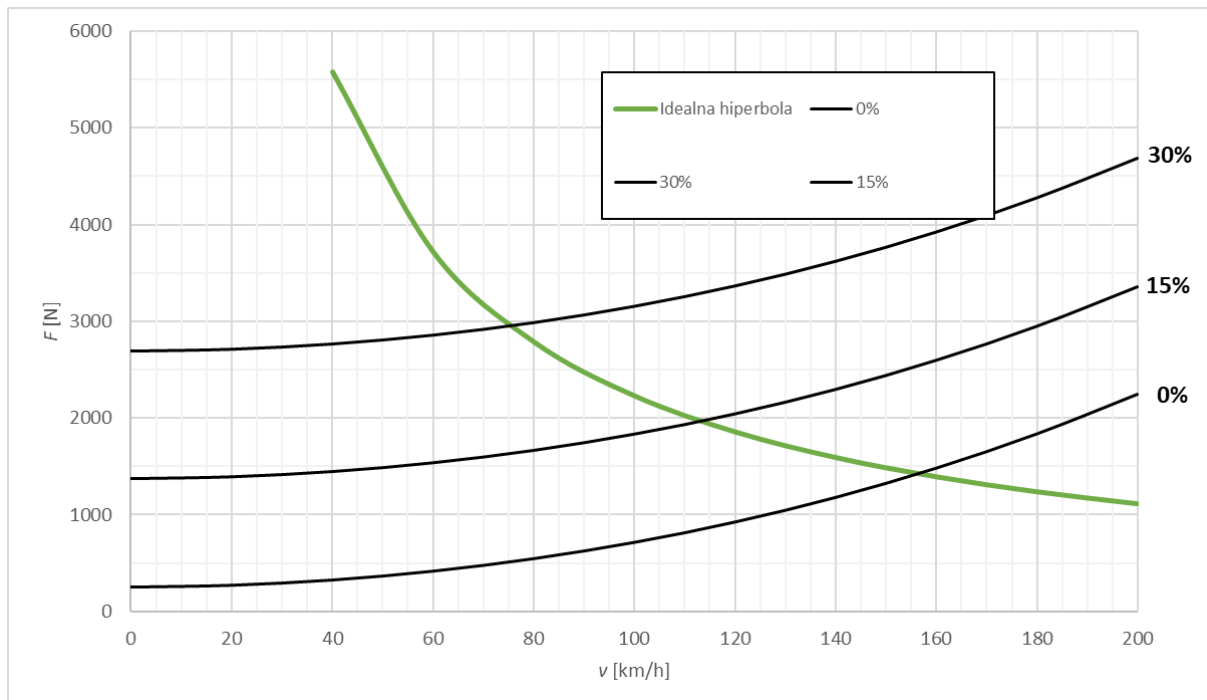
Vozilo može postići ubrzanje:

$$F_i = F_v - F_o = 1555,6 \text{ N}$$

$$F_i = m a \delta$$

$$a = \frac{F_i}{m \delta} = 1,22 \text{ m/s}^2$$

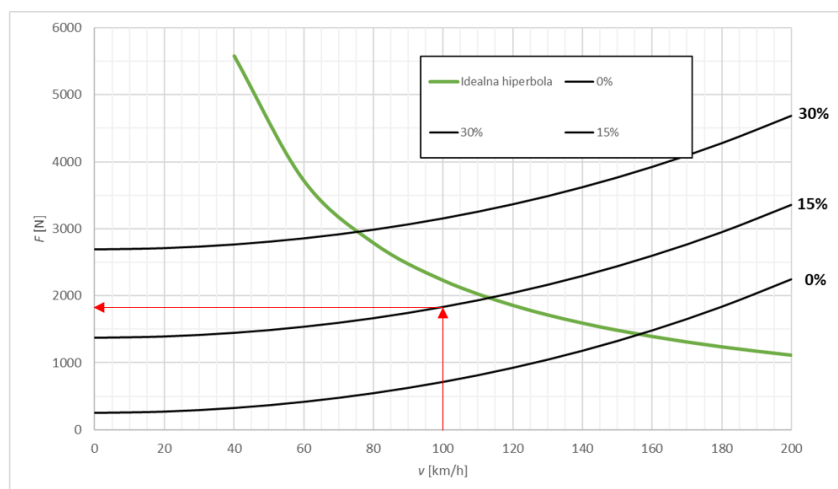
3.15. Za vozilo je zadan dijagram vuče (slika 22). Širina i visina vozila su: $B = 1,78$ m; $H = 1,42$ m, a gustoća zraka je $1,3 \text{ kg/m}^3$. Ako se vozilo kreće po cesti uspona 15%, koliki je faktor aerodinamičnosti vozila, s tim da je sila otpora zraka 35% ukupne sile otpora pri konstantnoj brzini od 100 km/h?



Slika 22

Rješenje:

a) Ukupna sila otpora pri brzini od 100 km/h se može očitati iz dijagrama:



Slika 23

Ukupna sila otpora na usponu od 15% je:

$$F_o = 1800 \text{ N}$$

Na silu otpora zraka otpada 35% ukupne sile otpora:

$$F_z = 0,35 \cdot F_o = 630 \text{ N}$$

Čelna površina vozila može se dobiti iz širine i visine vozila:

$$A = 0,9 \cdot B \cdot H = 0,9 \cdot 1,78 \cdot 1,42 = 2,56 \text{ m}^2$$

Faktor aerodinamičnosti se može izlučiti iz poznatog izraza za silu otpora zraka:

$$F_z = C_x \rho_z \frac{v^2}{2} A$$

$$C_x = \frac{2F_z}{\rho_z v^2 A} = \frac{2 \cdot 630}{1,3 \cdot 27,8^2 \cdot 2,56} = 0,49$$

3.16. Za vozilo je zadan dijagram vuče (slika 22). Ako je masa vozila 1470 kg, a utjecaj rotirajućih masa je 1,06, koliko ubrzanje vozilo može postići kada se kreće brzinom 100 km/h po horizontalnoj cesti?

Rješenje:

Rezerva sile za ubrzanje može se dobiti iz razlike raspoložive vučne sile i ukupne sile otpora pri toj brzini:

$$F_v = 2\,200 \text{ N}$$

$$F_o = 700 \text{ N}$$

$$F_i = F_v - F_o = 1500 \text{ N}$$

Što znači da vozilo može postići ubrzanje od:

$$F_i = m a \delta$$

$$a = \frac{F_i}{m \delta} = 0,96 \text{ m/s}^2$$

3.17. Za vozilo su zadane reakcije podloge ispod prednje osovine $G_{Np} = 5700$ N i stražnje osovine $G_{Ns} = 5100$ N. Vozilo kreće po asfaltu pri čemu je faktor prijanjanja (trenja) $\varphi = 0,8$. Kolika je sila prijanjanja između pogonskih kotača i podloge ako:

- a) vozilo ima pogon na prednje kotače;
- b) vozilo ima pogon na sva četiri kotača;
- c) vozilo ima pogon na sva četiri kotača, ali se kreće po makadamu ($\varphi = 0,48$)?

Rješenje:

Sila prijanjanja, odnosno sila trenja računa se preko poznatog izraza:

$$F_{pr} = \varphi F_N$$

gdje je F_N reakcija podloge, a φ faktor prijanjanja.

Faktor prijanjanja je omjer sile na obodu pneumatika i normalne reakcije podloge. Njime je ograničen maksimalni iznos vučne sile koji se može prenijeti na podlogu.

- a) Kod vozila koje ima pogon na prednjim kotačima, reakcija podloge je jednaka težini vozila koja opada na pogonsku (prednju) osovinu ($F_N = G_{Np}$).

$$F_{pr} = \varphi G_{Np} = 0,8 \cdot 5700 = 4560 \text{ N}$$

- b) Kod vozila koje ima pogon na sva četiri kotača, reakcija podloge je jednaka ukupnoj težini vozila ($F_N = G_{Np} + G_{Ns}$).

$$F_{pr} = \varphi (G_{Np} + G_{Ns}) = 0,8 \cdot (5700 + 5100) = 8640 \text{ N}$$

Vozila s pogonom na sva četiri kotača mogu prenijeti bitno veću vučnu silu na podlogu u odnosu na vozila s drugim tipovima pogona. To je zbog toga što se ukupna težina vozila prenosi na pogonske kotače, za razliku od vozila prednjim (ili stražnjim) pogonom kod kojih se na pogonske kotače prenosi samo dio ukupne težine vozila.

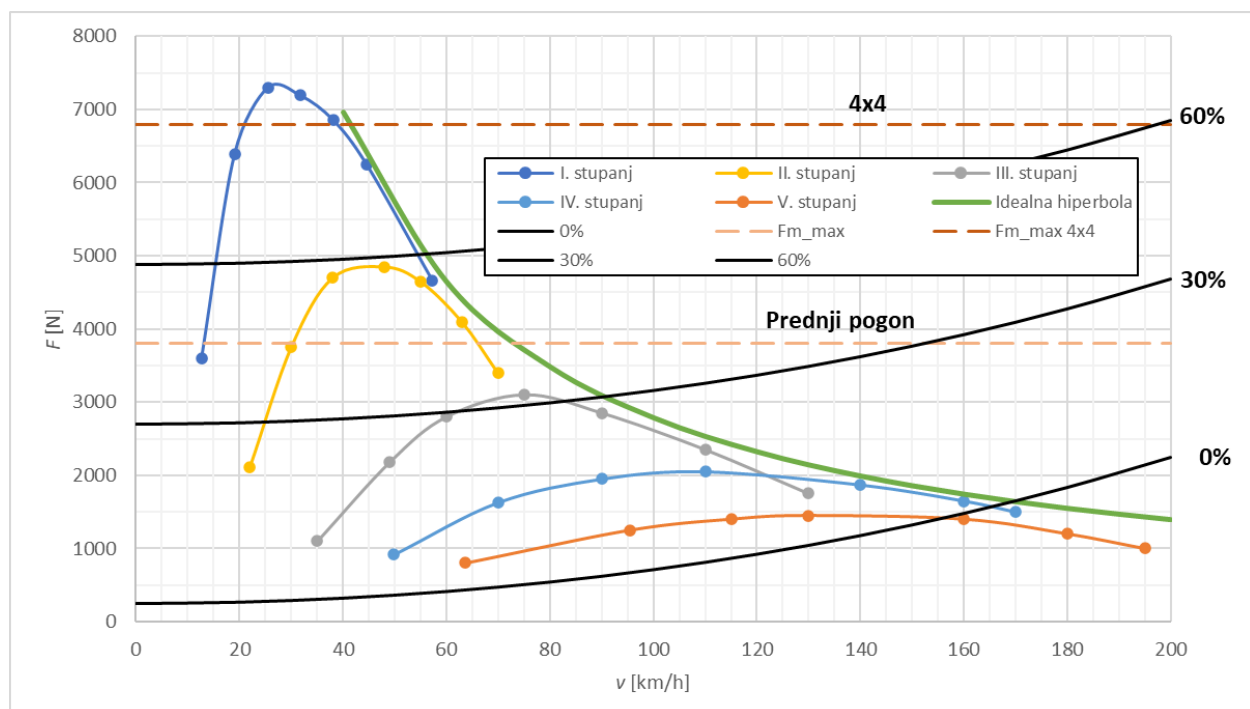
- c) Kod vozila koje ima pogon na sva četiri kotača, a kreće se po makadamu, sila prijanjanja računa se:

$$F_{pr} = \varphi (G_{Np} + G_{Ns}) = 0,48 \cdot (5700 + 5100) = 5184 \text{ N}$$

Koeficijent prijanjanja ϕ ovisi o je većem broju faktora, kao što su vrsta i stanje kolnika, opterećenje pogonskih kotača, brzina kretanja vozila, tip, vrsta i istrošenost pneumatika. Vrijednost koeficijenta ϕ smanjuje se na mokrim i prljavim kolnicima.

3.18. Za vozilo mase 1400 kg je zadan vučni dijagram (slika 23). Crne linije predstavljaju ukupnu silu otpora na usponima od 0%, 30% i 60%. Zelena linija predstavlja idealnu hiperbolu vuče, dok ostale linije predstavljaju vučne sile u pojedinom stupnju prijenosa. Utjecaj rotirajućih masa za ovo vozilo može se zanemariti. Ako se vozilo kreće po horizontalnoj cesti brzinom 80 km/h:

- koliko teorijsko ubrzanje može postići ovo vozilo;
- koliko stvarno ubrzanje može postići u III. stupnju prijenosa;
- koliko stvarno ubrzanje može postići u IV. stupnju prijenosa;
- do koje maksimalne brzine može ubrzavati ovo vozilo u teoriji; u IV. stupnju prijenosa; u V. stupnju prijenosa;
- ako vozilo ima pogon na sva četiri kotača (4x4) može li se maksimalna sila koja se ostvaruje u I. stupnju prijenosa prenijeti na podlogu bez proklizavanja kotača?



Slika 24

Rješenje:

Iz dijagram se može očitati da je ukupna sila otpora pri brzini od 80 km/h na horizontalnoj cesti jednaka:

$$F_{o\ 80} = 550\ N$$

a) Prema idealnoj hiperboli vuče iz dijagrama se može očitati da se pri 80 km/h ostvaruje vučna sila:

$$F_{v\ 80} = 3500\ N$$

Što znači da je rezerva sile za ubrzanje:

$$F_{i\ 80} = F_{v\ 80} - F_{o\ 80} = 2950\ N$$

$$F_{i\ 115} = m\ a\ \delta$$

$$a = \frac{F_i}{m\ \delta} = 2,1\ m/s^2$$

b) Prema krivulji vučne sile u III. stupnju prijenosa iz dijagrama se može očitati da se pri 80 km/h ostvaruje vučna sila:

$$F_{v\ 80} = 3050\ N$$

Što znači da je rezerva sile za ubrzanje:

$$F_{i\ 80} = F_{v\ 80} - F_{o\ 80} = 2500\ N$$

$$F_{i\ 115} = m\ a\ \delta$$

$$a = \frac{F_i}{m\ \delta} = 1,8\ m/s^2$$

c) Prema krivulji vučne sile u IV. stupnju prijenosa iz dijagrama se može očitati da se pri 80 km/h ostvaruje vučna sila:

$$F_{v\ 80} = 1800\ N$$

Što znači da je rezerva sile za ubrzanje:

$$F_{i\ 80} = F_{v\ 80} - F_{o\ 80} = 1250\ N$$

$$F_{i\ 115} = m\ a\ \delta$$

$$a = \frac{F_i}{m\ \delta} = 0,9\ m/s^2$$

d) Teoretska maksimalna brzina na horizontalnoj cesti se može očitati na sjecištu sile otpora i idealne hiperbole vuče i iznosi 170 km/h.

U IV. stupnju prijenosa maksimalna brzina se očitava na sjecištu sile otpora i vučne sile koja se ostvaruje u IV. stupnju prijenosa i iznosi 165 km/h.

U V. stupnju prijenosa maksimalna brzina se očitava na sjecištu sile otpora i vučne sile koja se ostvaruje u V. stupnju prijenosa i iznosi 155 km/h. Dakle, ovo vozilo može postići veću maksimalnu brzinu u IV. nego u V. stupnju prijenosa.

e) Maksimalna sila koja se ostvaruje u I. stupnju prijenosa iznosi 7300 N, a na između pogonskih kotača (4x4) i podloge se ostvaruje maksimalna sila prijanjanja od 6800 N. Dakle, maksimalna sila koja se ostvaruje u I. stupnju prijenosa ne može se prenijeti na podlogu i doći će do proklizavanja kotača. Proklizavanje se može spriječiti tako da se smanji dobava goriva motoru, tj. manjim pritiskom papučice gasa pri pokretanju vozila.

4. POTROŠNJA GORIVA

4.1. Za vozilo je zadano: masa vozila 1305 kg; faktor aerodinamičnosti 0,34; čelna površina vozila 2,2 m²; faktor otpora kotrljanja 0,017; gustoća zraka 1,2 kg/m³; gustoća goriva 820 kg/m³ (Diesel); specifična potrošnja goriva 280 g/kWh (pretpostavlja se da je specifična potrošnja goriva konstantna), iskoristivost transmisije je 90%.

Potrebno je izračunati kolika je satna potrošnja goriva ako se vozilo kreće brzinom 90 km/h po cesti uspona 2%, te koliko goriva vozilo troši izraženo u g/100 km i u l/100 km.

Rješenje:

Satna potrošnja goriva se može izračunati kao umnožak specifične potrošnje goriva i efektivne snage motora. Specifična potrošnja goriva se označava s *bsfc* (eng. *brake-specific fuel consumption*). U praksi se često izražava ne standardnim mjernim jedinicama g/kWh:

$$G_H = bsfc \cdot P_e$$

Potrošnja goriva izražena u g/100 km se računa kao:

$$G = \frac{G_H}{v} \cdot 100 = \frac{bsfc \cdot P_e}{v} \cdot 100$$

Pri izračunu potrošnje goriva treba paziti na mjerne jedinice u kojima se fizikalne veličine uvrstavaju u izraz, jer konačno rješenje se ne prikazuje u standardnim mjernim jedinicama.

$$G_H \left[\frac{g}{h} \right] = bsfc \left[\frac{g}{kWh} \right] \cdot P_e [kW]$$

$$G \left[\frac{g}{100 km} \right] = \frac{G_H \left[\frac{g}{h} \right]}{v \left[\frac{km}{h} \right]} \cdot 100$$

Efektivna snaga motora je potrebna snaga da se ostvari zadano kretanje vozila u zadanim uvjetima:

$$P_e = \frac{P_k}{\eta} = \frac{F_o \cdot v}{\eta} = \frac{(F_k + F_z + F_u) \cdot v}{\eta} = \frac{(m g f + C_x \rho_z \frac{v^2}{2} A + m g u) \cdot v}{\eta}$$

$$P_e = \frac{(1305 \cdot 9,81 \cdot 0,017 + 0,34 \cdot 1,2 \cdot \frac{(\frac{90}{3,6})^2}{2} \cdot 2,2 + 1305 \cdot 9,81 \cdot 0,02) \cdot (\frac{90}{3,6})}{0,9} = 20\,950\, W$$

Odnosno satna potrošnja može se zapisati kao:

$$G_H = bsfc \cdot \frac{\left(m g f + C_x \rho_z \frac{v^2}{2} A + m g u\right) \cdot v}{\eta}$$

$$G_H = 280 \cdot 20,95 = 5\,866 \frac{g}{h}$$

Iz izraza je očito da potrošnja goriva ovisi o mnogo faktora, kao što su masa, aerodinamičnost vozila i brzina kretanja vozila, učinkovitost transmisije, faktor otpora kotrljanja, uspon ceste itd. Kod izračuna potrošnje goriva, faktor otpora kotrljanja i uspon kao značajke ceste, često se prikazuju zajedno kao faktor otpora puta ($p = f + u$).

$$G = \frac{P_e \cdot bsfc}{v} \cdot 100 = \frac{20,95 \cdot 280}{90} \cdot 100 = 6\,518 \frac{g}{100\, km}$$

U praksi se potrošnja goriva puno češće izražava u litrama (odnosno dm^3) na 100 km prijednog puta:

$$Q = \frac{G}{\rho_g} = \frac{P_e \cdot bsfc}{v \cdot \rho_g} \cdot 100$$

Ponovno, pri izračunu potrošnje goriva treba paziti na mjerne jedinice u kojima se fizikalne veličine uvrstavaju u izraz, jer konačno rješenje se ne prikazuje u standardnim mjernim jedinicama.

$$Q \left[\frac{l}{100\, km} \right] = \frac{G \left[\frac{g}{100\, km} \right]}{\rho_g \left[\frac{kg}{m^3} \right]} = \frac{P_e [kW] \cdot bsfc \left[\frac{g}{kWh} \right]}{v \left[\frac{km}{h} \right] \cdot \rho_g \left[\frac{kg}{m^3} \right]} \cdot 100$$

$$Q = \frac{P_e \cdot bsfc}{v \cdot \rho_g} \cdot 100 = \frac{20,95 \cdot 280}{90 \cdot 820} \cdot 100 = 7,95 \frac{l}{100\, km}$$

4.2. Specifična potrošnja goriva motora je $bsfc = 260 \text{ g/kWh}$. Kolika je potrošnja goriva (benzin $\rho_g = 750 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$) automobila izražena u $\text{g}/100 \text{ km}$ i u $\text{l}/100 \text{ km}$ kada automobil iskorištava:

- maksimalnu svog motora $P_M = 55 \text{ kW}$ pri brzini od 160 km/h ;
- kada iskorištava efektivnu snagu motora $P'_M = 10 \text{ kW}$ pri brzini od 60 km/h ?

Rješenje:

- Kada vozilo iskorištava punu snagu svog motora potrošnja goriva će biti:

$$G = \frac{P_M \cdot bsfc}{v} \cdot 100 = \frac{55 \cdot 260}{160} \cdot 100 = 8\,940 \text{ g}/100\text{km}$$

$$Q = \frac{G}{\rho_g} = \frac{8\,940}{750} = 11,9 \text{ l}/100\text{km}$$

- Očekivano je da će potrošnja goriva biti manja kada vozilo ne iskorištava svoju punu snagu motora i kreće se manjom brzinom:

$$G = \frac{P'_M \cdot bsfc}{v} \cdot 100 = \frac{10 \cdot 260}{60} \cdot 100 = 4\,330 \text{ g}/100\text{km}$$

$$Q = \frac{G}{\rho_g} = \frac{4\,330}{750} = 5,78 \text{ l}/100\text{km}$$

4.3. Za vozilo je zadano: $m = 1200 \text{ kg}$, $C_x = 0,35$, $A = 2,1 \text{ m}^2$, $\rho_z = 1,3 \text{ kg/m}^3$, $p = 0,04$ (faktor otpora ceste $p = f + u$), $\eta = 85\%$, $bsfc = 270 \text{ g/kWh}$, vozilo koristi Diesel gorivo ($\rho_g = 840 \text{ kg/m}^3$). Pri brzini od 130 km/h :

- Kolika je snaga na kotačima vozila i efektivna snaga motora?
- Kolika je potrošnja goriva izražena u $\text{g}/100 \text{ km}$ i $\text{l}/100 \text{ km}$?
- Koliki put vozilo može prijeći pri ovim uvjetima s punim spremnikom goriva ako je volumen spremnika $V = 50 \text{ l}$?

Rješenje:

a) Kako bi se dobila snaga na kotačima, potrebno je izračunati ukupnu silu otpora pri zadanoj brzini:

$$F_p = F_k + F_u = m \cdot g \cdot p = 1200 \cdot 9,81 \cdot 0,04 = 470,9 \text{ N}$$

$$F_z = C_x \cdot \rho_z \cdot \frac{v^2}{2} \cdot A = 0,35 \cdot 1,3 \cdot \frac{\left(\frac{130}{3,6}\right)^2}{2} \cdot 2,1 = 623 \text{ N}$$

$$F_o = F_p + F_z = 470,9 + 623 = 1093,9 \text{ N}$$

$$P_k = F_o \cdot v = 1093,9 \cdot \left(\frac{130}{3,6}\right) = 39\,500 \text{ W}$$

Iz čega se može dobiti efektivna snaga motora:

$$P_e = \frac{P_k}{\eta} = \frac{39\,500}{0,85} = 46\,500 \text{ W}$$

b) Potrošnja goriva će biti:

$$G = \frac{P_e \cdot bsfc}{v} \cdot 100 = \frac{46,5 \cdot 270}{130} \cdot 100 = 9\,658 \text{ g/100km}$$

$$Q = \frac{G}{\rho_g} = \frac{9\,658}{840} = 11,5 \text{ l/100km}$$

c) S punim spremnikom, pri ovim uvjetima vožnje, vozilo može prijeći:

$$s = \frac{V}{Q} \cdot 100 = \frac{50}{11,5} \cdot 100 = 434,8 \text{ km}$$

4.4. Za vozilo je zadano: masa vozila 1,1 t; faktor aerodinamičnosti 0,32; čelna površina vozila 2,1 m²; faktor otpora puta 0,04; gustoća zraka 1,2 kg/m³; gustoća goriva 760 kg/m³ (benzin); iskoristivost transmisije je 93%. Ako automobil troši 7,2 l/ 100 km goriva pri brzini od 120 km/h:

a) Kolika je specifična potrošnja goriva?

b) Ako se pretpostavi se da se specifična potrošnja goriva ne mijenja, kolika je prosječna potrošnja goriva ako se masa vozila zbog ukrcaja tereta i putnika poveća za 300 kg?

Rješenje:

a) Specifična potrošnja goriva može se dobiti iz izraza za prosječnu potrošnju goriva:

$$Q = \frac{P_e \cdot bsfc}{v \cdot \rho_g} \cdot 100$$

$$bsfc = \frac{Q \cdot v \cdot \rho_g}{100 P_e}$$

Efektivna snaga motora može se dobiti:

$$F_p = F_k + F_u = m g p = 1100 \cdot 9,81 \cdot 0,04 = 431,6 \text{ N}$$

$$F_z = C_x \rho_z \frac{v^2}{2} A = 0,32 \cdot 1,2 \cdot \frac{\left(\frac{120}{3,6}\right)^2}{2} \cdot 2,1 = 448 \text{ N}$$

$$F_o = F_p + F_z = 431,6 + 448 = 879,6 \text{ N}$$

$$P_k = F_o \cdot v = 879,6 \cdot \left(\frac{120}{3,6}\right) = 29\,320 \text{ W}$$

$$P_e = \frac{P_k}{\eta} = \frac{29\,320}{0,93} = 31\,527 \text{ W}$$

Dakle, specifična potrošnja goriva iznosi:

$$bsfc = \frac{Q \cdot v \cdot \rho_g}{100 P_e} = \frac{7,2 \cdot 120 \cdot 760}{100 \cdot 31,527} = 208 \frac{\text{g}}{\text{kWh}}$$

b) Zbog veće mase automobila, potrebna je veća efektivna snaga da bi se vozilo kretalo jednakom brzinom. Sila otpora zraka ostaje ista, dok se sila otpora puta povećava zbog povećane mase vozila:

$$F_p = F_k + F_u = m g p = (1100 + 300) \cdot 9,81 \cdot 0,04 = 549,4 \text{ N}$$

$$F_o = F_p + F_z = 549,4 + 448 = 997,4 \text{ N}$$

$$P_k = F_o \cdot v = 997,4 \cdot \left(\frac{120}{3,6}\right) = 33\,247 \text{ W}$$

$$P_e = \frac{P_k}{\eta} = \frac{33\,247}{0,93} = 35\,749 \text{ W}$$

Prosječna potrošnja goriva je:

$$Q = \frac{P_e \cdot bsfc}{v \cdot \rho_g} \cdot 100 = \frac{35,749 \cdot 208}{120 \cdot 760} \cdot 100 = 8,15 \frac{l}{100 \text{ km}}$$

4.5. Kolika je razlika u potrošnji goriva ako vozilo kreće brzinom 140 km/h u odnosu kada bi isto vozilo kretalo brzinom 120 km/h. Za vozilo je zadano: masa vozila 1200 kg; faktor aerodinamičnosti 0,34; čelna površina vozila 2,2 m²; faktor otpora kotrljanja 0,018; gustoća zraka 1,2 kg/m³; gustoća goriva 760 kg/m³; specifična potrošnja goriva 250 g/kWh; iskoristivost transmisije je 92%.

Rješenje:

Za izračun potrošnje goriva treba se izračunati efektivna snaga motora za oba slučaja kretanja.

$$F_k = m g f = 211,9 \text{ N}$$

$$F_{z\,140} = C_x \rho_z \frac{v_{140}^2}{2} A = 678,7 \text{ N}$$

$$F_{z\,120} = C_x \rho_z \frac{v_{120}^2}{2} A = 498,7 \text{ N}$$

$$P_{e\,140} = \frac{F_{o\,140} \cdot v_{140}}{\eta} = \frac{(F_k + F_{z\,140}) \cdot v_{140}}{\eta} = 37\,646 \text{ W}$$

$$P_{e\,120} = \frac{F_{o\,120} \cdot v_{120}}{\eta} = \frac{(F_k + F_{z\,120}) \cdot v_{120}}{\eta} = 25\,746 \text{ W}$$

Prosječna potrošnja goriva se računa kao:

$$Q_{140} = \frac{P_{e\ 140} \cdot bsfc}{v_{140} \cdot \rho_g} \cdot 100 = \frac{37,646 \cdot 250}{140 \cdot 760} \cdot 100 = 8,85 \text{ l/100km}$$

$$Q_{120} = \frac{P_{e\ 120} \cdot bsfc}{v_{120} \cdot \rho_g} \cdot 100 = \frac{25,746 \cdot 250}{120 \cdot 760} \cdot 100 = 7,06 \text{ l/100km}$$

Razlika u potrošnji goriva za brzine 140 km/h i 120 km/h je:

$$\Delta Q = Q_{140} - Q_{120} = 8,85 - 7,06 = 1,81 \text{ l/100km}$$

4.6. Pri brzini od 100 km/h sila otpora zraka je dvostruko veća od sile otpora kotrljanja. Za vozilo je zadano: masa vozila 1150 kg; faktor otpora kotrljanja 0,02; gustoća goriva 720 kg/m³; specifična potrošnja goriva 240 g/kWh; iskoristivost transmisije je 94%. Kolika je razlika u potrošnji goriva kada se vozilo kreće po horizontalnoj cesti u odnosu kada bi se isto vozilo, istom brzinom kretalo po cesti uspona 3%?

Rješenje:

Na horizontalnoj cesti potrošnja goriva je:

$$F_k = m g f = 1150 \cdot 9,81 \cdot 0,02 = 225,6 \text{ N}$$

$$F_z = 2 F_k = 2 \cdot 225,6 = 451,2 \text{ N}$$

$$P_{e(hor)} = \frac{F_o \cdot v}{\eta} = \frac{(F_k + F_z) \cdot v}{\eta} = \frac{(225,6 + 451,2) \cdot \frac{100}{3,6}}{0,94} = 20\ 000 \text{ W}$$

$$Q_{hor} = \frac{P_{e(hor)} \cdot bsfc}{v \cdot \rho_g} \cdot 100 = \frac{20 \cdot 240}{100 \cdot 720} \cdot 100 = 6,67 \text{ l/100km}$$

Na usponu, sila otpora kotrljanja i zraka ostaju jednake, a potrošnja goriva je:

$$F_k = m g f = 1150 \cdot 9,81 \cdot 0,02 = 225,6 \text{ N}$$

$$F_z = 2 F_k = 2 \cdot 225,6 = 451,2 \text{ N}$$

$$F_u = m g u = 1150 \cdot 9,81 \cdot 0,03 = 338,4 \text{ N}$$

$$P_{e(usp)} = \frac{F_o \cdot v}{\eta} = \frac{(F_k + F_z + F_u) \cdot v}{\eta} = \frac{(225,6 + 451,2 + 338,4) \cdot \frac{100}{3,6}}{0,94} = 30\,000\,W$$

$$Q_{usp} = \frac{P_{e(hor)} \cdot bsfc}{v \cdot \rho_g} \cdot 100 = \frac{30 \cdot 240}{100 \cdot 720} \cdot 100 = 10\,l/100km$$

Razlika u potrošnji goriva jest:

$$\Delta Q = Q_{usp} - Q_{hor} = 10 - 6,67 = 3,33\,l/100km$$

4.7. Koliki put može prevaliti vozilo s punim spremnikom goriva zapremnine $V = 60\,l$ ako se vozilo kreće po horizontalnoj cesti brzinom od $80\,km/h$. U smjeru suprotnom od kretanja vozila puše vjetar brzinom $v_{vj} = 10\,km/h$. Iskoristivost transmisije je $92,5\%$. Faktor otpora kotrljanja se mijenja prema izrazu:

$$f = f_0(1 + C \cdot v^2)$$

Faktor C iznosi $4,52 \cdot 10^{-5}$, s tim da se brzina vozila uvrštava u km/h . Za vozilo je zadano: težina vozila $13\,250\,N$; faktor aerodinamičnosti $0,32$; čelna površina vozila $2,2\,m^2$; faktor otpora kotrljanja za male brzine je $0,014$; gustoća zraka $1,2\,kg/m^3$, gustoća goriva $840\,kg/m^3$, specifična potrošnja goriva $280\,g/kWh$ (pretpostavlja se da je specifična potrošnja goriva konstantna).

Rješenje:

Vjetar utječe samo na silu otpora zraka i čini relativnu brzinu gibanja vozila s obzirom na zrak većom jer vjetar puše suprotno od smjera gibanja. Relativna brzina kretanja vozila iznosi:

$$v_r = v + v_{vj} = 80 + 10 = 90\,km/h$$

Što znači da je sila otpora zraka:

$$F_z = C_x \rho_z \frac{v_r^2}{2} A = 0,32 \cdot 1,2 \cdot \frac{\left(\frac{90}{3,6}\right)^2}{2} \cdot 2,2 = 264\,N$$

Faktor otpora kotrljanja se računa prema zadanom izrazu i uzima u obzir brzinu kretanja vozila od $80\,km/h$ (brzina se uvrštava u km/h):

$$f = f_0(1 + C \cdot v^2) = 0,014 \cdot (1 + 4,52 \cdot 10^{-5} \cdot 80^2) = 0,018$$

Sila otpora kotrljanja će biti:

$$F_k = m g f = G f = 13\,250 \cdot 0,018 = 238,5 \text{ N}$$

Snaga na kotačima potrebna za savladavanje otpora pri brzini od 80 km/h jest:

$$P_k = F_o \cdot v = (F_k + F_z) \cdot v = (238,5 + 264) \cdot \left(\frac{80}{3,6}\right) = 11\,167 \text{ W}$$

Efektivna snaga motora:

$$P_e = \frac{P_k}{\eta} = \frac{11\,167}{0,925} = 12\,072 \text{ W}$$

Prosječnu potrošnja goriva ako se vozilo kreće 80 km/h je:

$$Q = \frac{P_e \cdot bsfc}{v \cdot \rho_g} \cdot 100 = \frac{12,072 \cdot 280}{80 \cdot 840} \cdot 100 = 5,03 \frac{l}{100 \text{ km}}$$

S punim spremnikom, u ovim uvjetima vožnje, vozilo može prijeći:

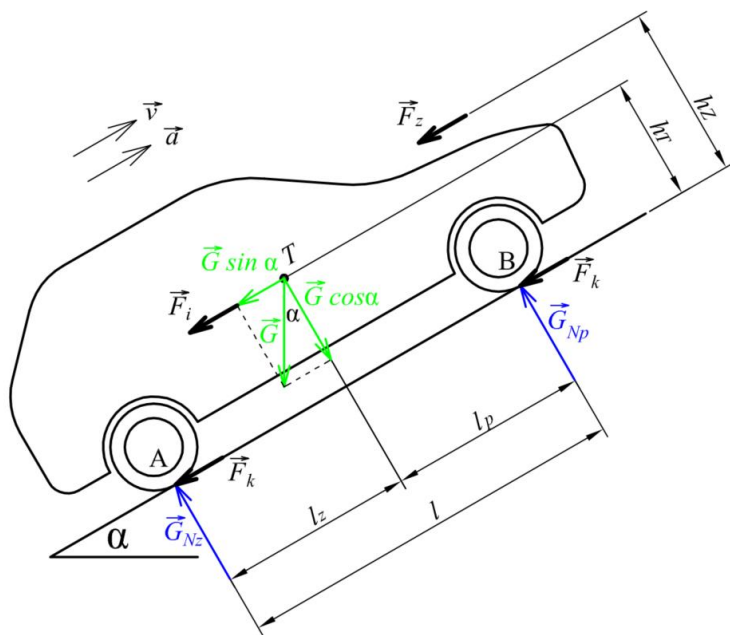
$$s = \frac{V}{Q} \cdot 100 = \frac{60}{5,03} \cdot 100 = 1192,8 \text{ km}$$

5. STABILNOST VOZILA

5.1. Cestovno vozilo s pogonom na stražnje kotače kreće se po cesti s uzdužnim nagibom. Potrebno je analizirati uzdužnu stabilnost vozila, tj. odrediti:

- maksimalni uspon, odnosno kut pri kojem dolazi do prevrtanja vozila oko stražnje osovine,
- maksimalni uspon, odnosno kut kod kojeg dolazi do proklizavanja pogonskih kotača vozila,
- uvjet da bi proklizavanje pogonskih kotača nastupilo prije prevrtanja vozila oko stražnje osovine.

Za vozilo je zadano: međuosovinski razmak $l = 2,6$ m; udaljenost težišta od prednje osovine $l_p = 1,4$ m; udaljenost težišta od stražnje osovine $l_z = 1,2$ m; visina težišta $h_T = 0,5$ m; faktor otpora kotrljanja $f = 0,014$; faktor prijanjanja $\varphi = 0,8$.



Slika 25

Rješenje:

- Kod kretanja vozila po cesti s uzdužnim nagibom koji je definiran kutom α , do prevrtanja vozila oko stražnje osovine će doći kada u trenutku kada normalna reakcija podloge ispod prednje osovine postane nula.

$$\sum M_A = 0$$

$$G_{Np}l + F_z h_z + F_i h_T + G \sin \alpha h_T - G \cos \alpha l_z = 0$$

$$G_{Np} = \frac{G \cos \alpha l_z - G \sin \alpha h_T - F_z h_z - F_i h_T}{l}$$

Kod prevrtanja oko stražnje osovine dolazi kada se vozilo prestane oslanjati na prednju osovinu:

$$G_{Np} = 0$$

Granični slučaj stabilnosti:

$$G \cos \alpha l_z - G \sin \alpha h_T - F_z h_z - F_i h_T = 0$$

Uvjet stabilnosti vozila:

$$G \cos \alpha l_z - G \sin \alpha h_T - F_z h_z - F_i h_T > 0$$

Iz čega se zaključuje da sila otpora inercije pri ubrzanju i sila otpora zraka povećavaju mogućnost prevrtanja oko stražnje osovine, dok inercijska sila pri usporavanju ima suprotan učinak.

Maksimalni uspon vozilo može savladati kada se kreće jednolikom i malom brzinom. Pri konstantnoj brzini ubrzanje je jednako nuli, stoga je nema sile otpora inercije ($F_i = 0$), a sila otpora zraka je zanemariva ($F_z = 0$).

$$G \cos \alpha l_z = G \sin \alpha h_T$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{l_z}{h_T}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{l_z}{h_T}$$

Gdje je α granični kut uspona kod kojeg dolazi do prevrtanja vozila oko stražnje osovine.

$$\operatorname{tg} \alpha_{pr} = \frac{l_z}{h_T} = \frac{1,2}{0,5} = 2,4$$

Što odgovara usponu:

$$u = 240\%$$

Odnosno kutu uspona:

$$\alpha_{pr} = 67,4^\circ$$

Što je poprilično velik uspon, te je u praksi osigurana stabilnost vozila.

b) Maksimalni uspon koji vozilo može savladati ograničen je i uvjetom prijanjanja pogonskih kotača. Na pogonskim kotačima maksimalna vučna sila je ograničena maksimalnom silom koja se može prenijeti na podlogu, a koja ovisi o faktoru prijanjanja i opterećenju pogonske (stražnje) osovine².

$$F_{v,max} = \varphi G_{Nz}$$

Vučna sila mora savladati sve sile otpora, te mora biti veća ili jednaka ukupnoj sili otpora.

$$F_v \geq F_o$$

Maksimalni uspon može se izračunati iz graničnog slučaja, kada je vučna sila jednaka ukupnoj sili otpora:

$$F_v = F_o$$

$$F_o = F_k + F_u + F_z + F_i$$

$$F_o = G \cos \alpha f + G \sin \alpha + F_z + F_i$$

² Pogledati zadatak 3.17.

Postavljanjem sume momenata oko prednje osovine dobije se:

$$\sum M_B = 0$$

$$G_{Nz}l - F_z h_z - F_i h_T - G \sin \alpha h_T - G \cos \alpha l_p = 0$$

$$G_{Nz} = \frac{G \cos \alpha l_p + G \sin \alpha h_T + F_z h_z + F_i h_T}{l}$$

Uvrštavanjem gornjih izraza u granični uvjet proklizavanja pogonskih kotača dobije se:

$$G \cos \alpha f + G \sin \alpha + F_z + F_i = \varphi \frac{G \cos \alpha l_p + G \sin \alpha h_T + F_z h_z + F_i h_T}{l}$$

Uz pretpostavku da se vozilo kreće konstantnom i malom brzinom ($F_z=0$, $F_i=0$), dobije se:

$$Gl f \cos \alpha + Gl \sin \alpha = \varphi G (\cos \alpha l_p + \sin \alpha h_T) \quad /: G$$

$$lf \cos \alpha + l \sin \alpha = \varphi \cos \alpha l_p + \varphi \sin \alpha h_T \quad /: \cos \alpha$$

$$lf + l \operatorname{tg} \alpha = \varphi l_p + \varphi h_T \operatorname{tg} \alpha$$

$$l \operatorname{tg} \alpha - \varphi h_T \operatorname{tg} \alpha = \varphi l_p - lf$$

$$\operatorname{tg} \alpha (l - \varphi h_T) = \varphi l_p - lf$$

Kut pri kojem nastupa proklizavanje:

$$\operatorname{tg} \alpha_{kl} = \frac{\varphi l_p - lf}{l - \varphi h_T}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{kl} = \frac{0,8 \cdot 1,4 - 2,6 \cdot 0,014}{2,6 - 0,8 \cdot 0,5} = 0,49$$

Što odgovara usponu:

$$u = 49\%$$

Odnosno kutu uspona:

$$\alpha_{pr} = 26^\circ$$

c) Proklizavanje pogonskih kotača je definitivno manje štetno za vozilo nego prevrtanje vozila. Zbog toga kut pri kojem će proklizati pogonski kotači treba biti manji od kuta prevrtanja vozila oko stražnje osovine. Da bi proklizavanje pogonskih kotača nastupilo prije prevrtanja treba biti zadovoljen relativni kriterij stabilnosti, tj. uvjet:

$$\operatorname{tg} \alpha_{kl} < \operatorname{tg} \alpha_{pr}$$

$$\frac{\varphi l_p - lf}{l - \varphi h_T} < \frac{l_z}{h_T}$$

$$\varphi h_T l_p + \varphi h_T l_z < l_z l + h_T lf$$

$$\varphi(h_T) < l(l_z + h_T f)$$

$$\varphi < \frac{l(l_z + f h_T)}{h_T (l_p + l_z)}$$

$$\varphi < \frac{l_z + f h_T}{h_T}$$

Kako je faktor otpora kotrljanja jako mali iznos, može se zanemariti ($f \approx 0$), te se dobije:

$$\varphi < \frac{l_z}{h_T}$$

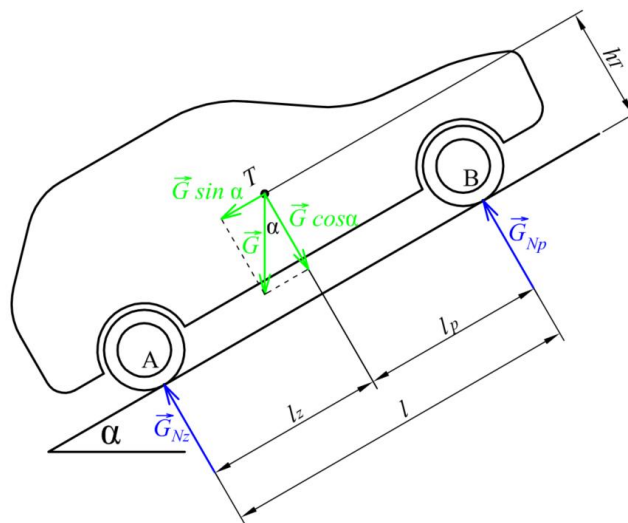
Budući da je kod suvremenih vozila udaljenost stražnje osovine od težišta (l_z) veća od visine težišta (h_T), a faktor prijanjanja (φ) je manji od 1, ovaj uvjet je gotovo uvijek ispunjen.

5.2. Za automobil koji se kreće konstantnom i malom brzinom ($F_i = 0$, $F_z = 0$), te ima pogon na sva četiri kotača, potrebno je odrediti:

- maksimalni uspon, odnosno kut nagiba pri kojem dolazi do prevrtanja vozila oko stražnje osovine;
- maksimalni uspon, odnosno kut nagiba kod kojeg dolazi do proklizavanja pogonskih kotača vozila;
- je li ostvaren relativni kriterij stabilnosti (uvjet da proklizavanje pogonskih kotača nastupi prije prevrtanja vozila oko stražnje osovine)?

Zadano: $l_p = 1,32$ m; $l_z = 1,29$ m; $h_T = 0,65$ m, $f = 0,016$, $\varphi = 0,9$.

Rješenje:



Slika 26

a)

$$\operatorname{tg} \alpha_{pr} = \frac{l_z}{h_T} = \frac{1,29}{0,65} = 1,985$$

$$u = \operatorname{tg} \alpha_{pr} = 1,985 = 198,5 \%$$

$$\alpha_{pr} = 63,3^\circ$$

b) Budući da vozilo ima pogon na sve kotače, cjelokupna težina vozila se prenosi na podlogu (odnosno komponenta težine okomita na podlogu ako se vozilo nalazi na usponu). Klizanje nastupa kada sila otpora uspona postaje veća od sile trenja između kotača i podloge, tj. granični uvjet klizanja je:

$$G \sin \alpha = \varphi G \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{kl} = \varphi$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{kl} = u = 0,6 = 60\%$$

$$\alpha_{kl} = 30,96^\circ$$

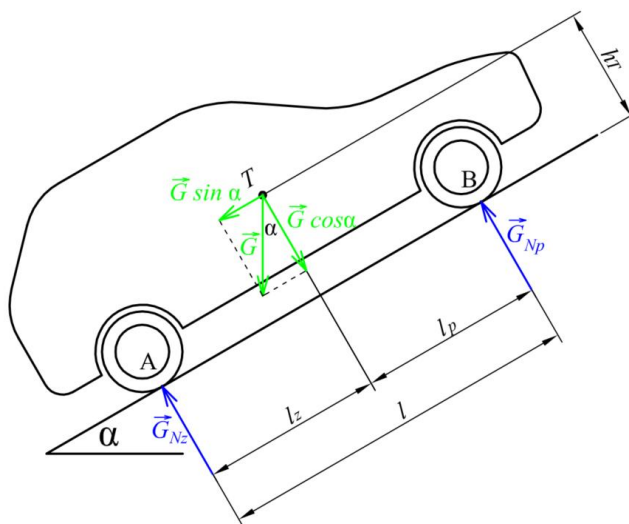
5.3. Za automobil koji se kreće konstantnom i malom brzinom ($F_i = 0$, $F_z = 0$), te ima pogon na prednje kotače odrediti:

a) maksimalni uspon, odnosno kut nagiba pri kojem dolazi do prevrtanja vozila oko stražnje osovine;

b) maksimalni uspon, odnosno kut nagiba kod kojeg dolazi do proklizavanja pogonskih kotača vozila.

Zadano: $l_p = 1,28$ m; $l_z = 1,24$ m; $h_T = 0,55$ m, $f = 0,014$, $\varphi = 0,8$.

Rješenje:



Slika 27

a)

$$\operatorname{tg} \alpha_{pr} = \frac{l_z}{h_T} = \frac{1,24}{0,55} = 2,25$$

$$u = \operatorname{tg} \alpha_{pr} = 2,25 = 225 \%$$

$$\alpha_{pr} = 66,1^\circ$$

b) Na pogonskim kotačima maksimalna vučna sila je ograničena maksimalnom silom koja se može prenijeti na podlogu, a koja ovisi o faktoru prijanjanja i opterećenju pogonske (prednje) osovine.

$$F_{v,max} = \varphi G_p$$

$$F_v = F_o$$

$$F_o = F_k + F_u$$

$$F_o = G \cos \alpha f + G \sin \alpha$$

Postavljanjem sume momenata oko stražnje osovine dobije se:

$$\sum M_A = 0$$

$$G_{Np} l + G \sin \alpha h_T - G \cos \alpha l_z = 0$$

$$G_{Np} = \frac{G \cos \alpha l_z - G \sin \alpha h_T}{l}$$

Uvrštavanjem gornjih izraza u granični uvjet proklizavanja pogonskih kotača dobije se:

$$G \cos \alpha f + G \sin \alpha = \varphi \left(\frac{G \cos \alpha l_z - G \sin \alpha h_T}{l} \right)$$

$$G \cos \alpha f l + G \sin \alpha l = \varphi G \cos \alpha l_z - \varphi G \sin \alpha h_T \quad / : G \cos \alpha$$

$$f l + \operatorname{tg} \alpha l = \varphi l_z - \varphi \operatorname{tg} \alpha h_T$$

$$\operatorname{tg} \alpha l + \varphi \operatorname{tg} \alpha h_T = \varphi l_z - f l$$

$$\operatorname{tg} \alpha (l + \varphi h_T) = \varphi l_z - f l$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{kl} = \frac{\varphi l_z - f l}{l + \varphi h_T}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{kl} = \frac{0,8 \cdot 1,24 - 0,014 \cdot (1,28 + 1,24)}{(1,28 + 1,24) + 0,8 \cdot 0,55}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{kl} = \frac{0,8 \cdot 1,24 - 0,014 \cdot (1,28 + 1,24)}{(1,28 + 1,24) + 0,8 \cdot 0,55}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{kl} = 0,323$$

$$u = 32,3 \%$$

$$\alpha_{kl} = 17,91^\circ$$

5.4. Cestovno vozilo kreće se po cesti s uzdužnim nagibom malom i konstantnom brzinom. Za vozilo je zadano: udaljenost težišta od prednje osovine $l_p = 1,4$ m; udaljenost težišta od stražnje osovine $l_z = 1,2$ m; visina težišta $h_T = 0,5$ m; faktor otpora kotrljanja $f = 0,015$; faktor prijanjanja $\varphi = 0,82$. Potrebno je odrediti maksimalni uspon, odnosno kut kod kojeg dolazi do proklizavanja pogonskih kotača vozila ako vozilo ima pogon na:

- a) prednje kotače,
- b) stražnje kotače,
- c) na sva četiri kotača.

Rješenje:

a)

$$\operatorname{tg} \alpha_{kl} = \frac{\varphi l_z - f l}{l + \varphi h_T}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{kl} = \frac{0,82 \cdot 1,2 - 0,015 \cdot 2,6}{2,6 + 0,8 \cdot 0,5}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{kl} = 0,315$$

$$u = 31,5\%$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{kl} = 17,48^\circ$$

b)

$$\operatorname{tg} \alpha_{kl} = \frac{\varphi l_p - l f}{l - \varphi h_T}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{kl} = \frac{0,82 \cdot 1,4 - 2,6 \cdot 0,015}{2,6 - 0,8 \cdot 0,5}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{kl} = 0,504$$

$$u = 50,4\%$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{kl} = 26,75^\circ$$

c)

$$\operatorname{tg} \alpha_{kl} = \varphi$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{kl} = 0,82$$

$$u = 82\%$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{kl} = 39,35^\circ$$

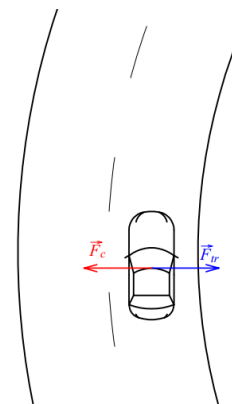
5.5. Automobil mase 1200 kg ulazi u zavoj bez nagiba. Kolika je potrebna sila priranja i faktor priranja da zadrži automobil u zavoju polumjera 80 m ako se automobil kreće:

a) brzinom 50 km/h;

b) brzinom 100 km/h.

Rješenje:

Centrifugalna sila (F_c) koja djeluje na vozilo u zavoju izaziva promjenu putanje vozila i izlijetanje vozila na horizontalnoj prometnici.



Slika 28

Granični uvjet bočnog klizanja vozila u zavoju je:

$$F_c = \mu \cdot F_N$$

$$F_c = m \cdot a_N = \frac{mv^2}{r}$$

a)

$$F_{c(a)} = \frac{mv^2}{r} = \frac{1200 \cdot 13,9^2}{80} = 2\,894\,N \approx 3\,000\,N$$

b)

$$F_{c(b)} = \frac{mv^2}{r} = \frac{1200 \cdot 27,8^2}{80} = 11\,574\,N \approx 12\,000\,N$$

Iz navedenog se može primijetiti da pri dva puta većoj brzini kretanja vozila potrebna sila da zadrži vozilo na putanji je četiri puta veća (jer sila ovisi o kvadratu brzine kretanja vozila).

Na horizontalnoj cesti, normalna reakcija podloge je jednaka težini vozila. Maksimalna sila prijanjanja koja se ostvaruje između kotača i podloge:

$$F_{tr} = \mu F_N = \mu G$$

$$\mu = \frac{F_{tr}}{G} = \frac{F_{tr}}{mg}$$

a)

$$\mu_{(a)} = \frac{F_{tr(a)}}{mg} = \frac{2\,894}{11\,772} = 0,246$$

Ovaj faktor prijanjanja se može ostvariti na gotovo svim podlogama (izuzev snijega ili zaleđene ceste).

b)

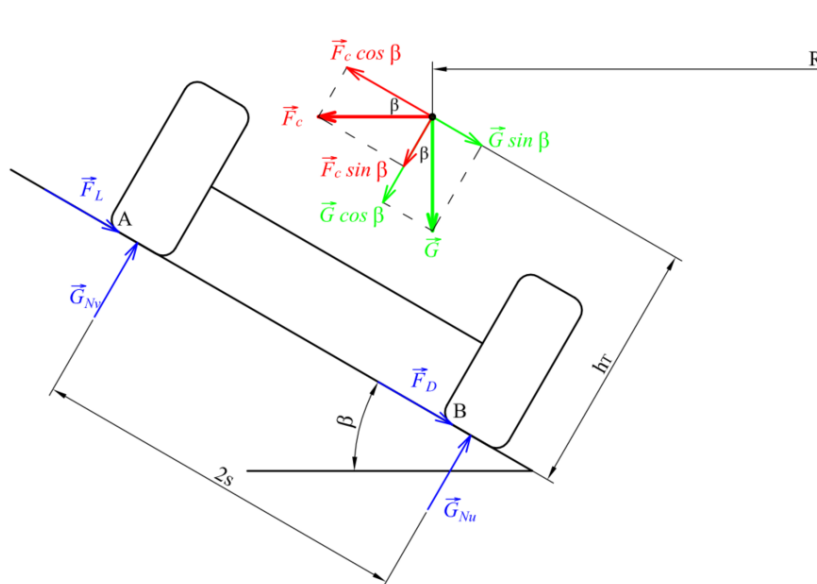
$$\mu_{(b)} = \frac{F_{tr(b)}}{mg} = \frac{11\,574}{11\,772} = 0,983$$

Ovaj faktor prijanjanja se jako teško može ostvariti čak i na novom i suhom asfaltu.

5.6. Vozilo se kreće po zavoju radijusa $R = 300$ m i bočnog nagiba ceste $\beta = 2^\circ$. Faktor prijanjanja između kotača i podloge je $\varphi = 0,8$. Trag kotača vozila $2s = 1,4$ m, a visina težišta vozila je $h_T = 0,6$ m. Potrebno je odrediti:

- kritičnu brzinu kretanja vozila kod koje će doći do prevrtanja vozila;
- kritičnu brzinu kretanja vozila kod koje će doći do proklizavanja vozila;
- uvjet da klizanje nastupi prije prevrtanja.

Rješenje:



Slika 29

Kod kretanja vozila u zavoju može doći do bočnog proklizavanja ili čak do bočnog prevrtanja vozila zbog djelovanja centrifugalne sile.

- Do prevrtanja vozila dolazi zbog momenta izazvanog djelovanjem komponente centrifugalne sile na kraku h_T oko kotača s vanjske strane zavoja (točka A) tj., kada nestane opterećenje na kotačima vozila s unutarnje strane zavoja ($G_u = 0$).

$$\sum M_A = 0$$

$$G_u 2s + F_c \cos \beta h_T - F_c \sin \beta s - G \cos \beta s - G \sin \beta h_T = 0$$

$$G_u = \frac{F_c \sin \beta s + G \cos \beta s + G \sin \beta h_T - F_c \cos \beta h_T}{2s}$$

Granični uvjet prevrtanja je:

$$G_u = 0$$

$$F_c \sin \beta s + G \cos \beta s + G \sin \beta h_T - F_c \cos \beta h_T = 0$$

Centrifugalna sila definirana je kao:

$$F_c = m \frac{v^2}{R} = \frac{G}{g} \cdot \frac{v^2}{R}$$

$$\frac{G}{g} \cdot \frac{v^2}{R} \sin \beta s + G \cos \beta s + G \sin \beta h_T - \frac{G}{g} \cdot \frac{v^2}{R} \cos \beta h_T = 0 \quad /: G$$

$$\frac{v^2}{Rg} (\cos \beta h_T - \sin \beta s) = \cos \beta s + \sin \beta h_T \quad /: \cos \beta$$

$$\frac{v^2}{Rg} (h_T - \operatorname{tg} \beta s) = s + \operatorname{tg} \beta h_T$$

$$v_{pr} = \sqrt{Rg \cdot \frac{s + h_T \operatorname{tg} \beta}{h_T - s \operatorname{tg} \beta}}$$

$$v_{pr} = \sqrt{300 \cdot 9,81 \cdot \frac{0,7 + 0,6 \cdot \operatorname{tg} 2}{0,6 - 0,7 \cdot \operatorname{tg} 2}}$$

$$v_{pr} = 60,7 \frac{m}{s} = 218,6 \frac{km}{h}$$

b) Do proklizavanja dolazi kada je sila prijanjanja između kotača i podloge manja od komponente centrifugalne sile koja je paralelna s podlogom. Do proklizavanja najčešće dolazi kada se vozilo kreće po podlozi niskog faktora prijanjanja kao što je mokra ili zaleđena cesta. Granična brzina klizanja se računa iz jednakosti sila koje uzrokuju i sprječavaju klizanje.

$$F_L + F_D = \varphi G$$

$$F_L + F_D = F_C \cos \beta - G \sin \beta$$

$$G = F_C \sin \beta + G \cos \beta$$

$$F_C \cos \beta - G \sin \beta = \varphi (F_C \sin \beta + G \cos \beta)$$

$$\frac{G}{g} \cdot \frac{v^2}{R} \cos \beta - G \sin \beta = \varphi \left(\frac{G}{g} \cdot \frac{v^2}{R} \sin \beta + G \cos \beta \right) \quad / : G \cos \beta$$

$$\frac{v^2}{Rg} - \operatorname{tg} \beta = \varphi \left(\frac{v^2}{Rg} \operatorname{tg} \beta + 1 \right)$$

$$\frac{v^2}{Rg} (1 - \varphi \operatorname{tg} \beta) = \varphi + \operatorname{tg} \beta$$

$$v_{kl} = \sqrt{Rg \cdot \frac{\varphi + \operatorname{tg} \beta}{1 - \varphi \operatorname{tg} \beta}}$$

Iz izraza je očito da na stabilnost vozila pri klizanju utječe vrsta i stanje podloge po kojoj se vozilo kreće, te pneumatici vozila. Poželjno je da su radijus zakrivljenosti, bočni nagib ceste i faktor prijanjanja što veći.

$$v_{kl} = \sqrt{300 \cdot 9,81 \cdot \frac{0,8 + \operatorname{tg} 2}{1 - 0,8 \operatorname{tg} 2}}$$

$$v_{kl} = 50,3 \frac{m}{s} = 181 \frac{km}{h}$$

c) Pri projektiranju vozila poželjno je osigurati da je granična brzina klizanja manja od granične brzine prevrtanja.

$$v_{pr} > v_{kl}$$

$$Rg \cdot \frac{s + h_T \operatorname{tg} \beta}{h_T - s \operatorname{tg} \beta} > Rg \cdot \frac{\varphi + \operatorname{tg} \beta}{1 - \varphi \operatorname{tg} \beta}$$

$$\frac{s + h_T \operatorname{tg} \beta}{h_T - s \operatorname{tg} \beta} > \frac{\varphi + \operatorname{tg} \beta}{1 - \varphi \operatorname{tg} \beta}$$

Za podlogu bez nagiba β :

$$\frac{s}{h_T} > \varphi$$

$$\frac{0,7}{0,6} > 0,8$$

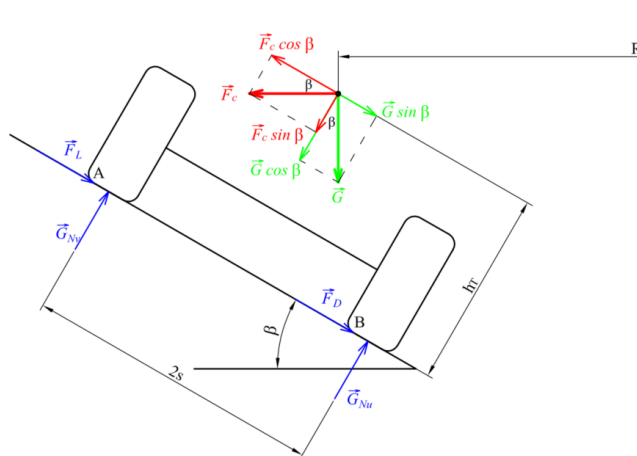
$$1,167 > 0,8$$

5.7. Vozilo se kreće po zavoju radijusa $R = 230$ m, faktor prijanjanja je $\varphi = 0,72$, trag kotača vozila $2s = 1,32$ m, a visina težišta vozila je $h_T = 0,5$ m. Skicirati vozilo i odrediti:

- kritičnu brzinu kretanja vozila kod koje će doći do prevrtanja vozila, odnosno proklizavanja vozila na cesti i bočnog nagiba ceste $\beta = 2^\circ$;
- kritičnu brzinu kretanja vozila kod koje će doći do prevrtanja vozila, odnosno proklizavanja vozila na cesti bez bočnog nagiba.

Rješenje:

- vozilo na cesti s bočnim nagibom:



Slika 30

$$v_{pr} = \sqrt{Rg \cdot \frac{s + h_T \operatorname{tg} \beta}{h_T - s \operatorname{tg} \beta}}$$

$$v_{pr} = \sqrt{230 \cdot 9,81 \cdot \frac{0,66 + 0,5 \cdot \operatorname{tg} 2}{0,5 - 0,66 \cdot \operatorname{tg} 2}}$$

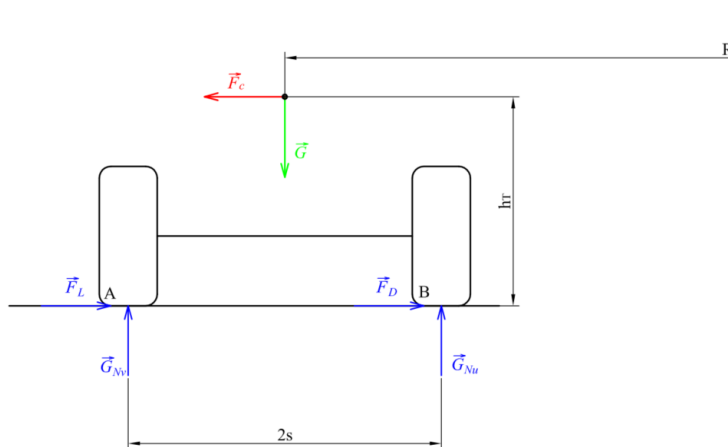
$$v_{pr} = 56,6 \frac{m}{s} = 203,8 \frac{km}{h}$$

$$v_{kl} = \sqrt{Rg \cdot \frac{\varphi + \operatorname{tg} \beta}{1 - \varphi \operatorname{tg} \beta}}$$

$$v_{kl} = \sqrt{230 \cdot 9,81 \cdot \frac{0,72 + \operatorname{tg} 2}{1 - 0,72 \cdot \operatorname{tg} 2}}$$

$$v_{kl} = 41,8 \frac{m}{s} = 150,5 \frac{km}{h}$$

b) vozilo na cesti bez bočnog nagiba:



Slika 31

$$v_{pr} = \sqrt{Rg \cdot \frac{s}{h_T}}$$

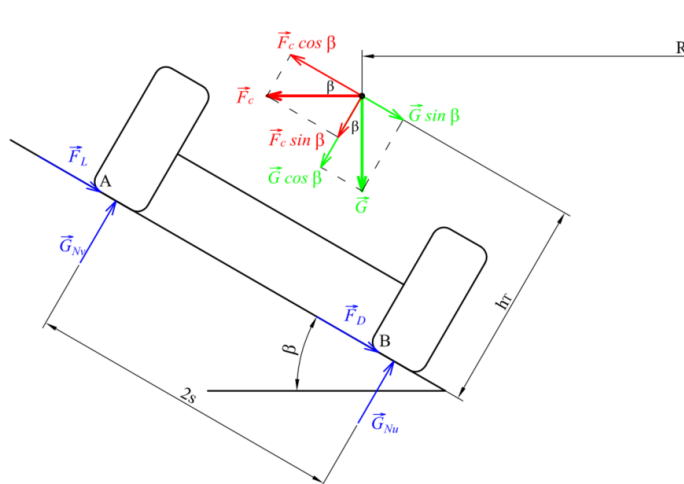
$$v_{pr} = \sqrt{230 \cdot 9,81 \cdot \frac{0,66}{0,5}} = 54,6 \frac{m}{s} = 196,5 \frac{km}{h}$$

$$v_{kl} = \sqrt{R \cdot g \cdot \varphi}$$

$$v_{kl} = \sqrt{230 \cdot 9,81 \cdot 0,72} = 40,3 \frac{m}{s} = 145,1 \frac{km}{h}$$

5.8. Vozilo se kreće po zavoju radijusa $R = 240$ m i i bočnog nagiba ceste $\beta = 2^\circ$, trag kotača vozila $2s = 1,28$ m, a visina težišta vozila je $h_T = 0,45$ m. Skicirati vozilo i odrediti:

- kritičnu brzinu kretanja vozila kod koje će doći do prevrtanja vozila, odnosno proklizavanja vozila na dobrom i suhom asfaltu ($\varphi = 0,8$)
- kritičnu brzinu kretanja vozila kod koje će doći do prevrtanja vozila, odnosno proklizavanja vozila na mokrom asfaltu ($\varphi = 0,6$)



Slika 32

a) dobar i suh asfalt ($\varphi = 0,8$)

$$v_{pr} = \sqrt{Rg \cdot \frac{s + h_T \operatorname{tg} \beta}{h_T - s \operatorname{tg} \beta}}$$

$$v_{pr} = \sqrt{240 \cdot 9,81 \cdot \frac{0,64 + 0,45 \cdot \operatorname{tg} 2}{0,45 - 0,64 \cdot \operatorname{tg} 2}}$$

$$v_{pr} = 60,1 \frac{m}{s} = 216,3 \frac{km}{h}$$

$$v_{kl} = \sqrt{Rg \cdot \frac{\varphi + \operatorname{tg} \beta}{1 - \varphi \operatorname{tg} \beta}}$$

$$v_{kl} = \sqrt{240 \cdot 9,81 \cdot \frac{0,8 + \operatorname{tg} 2}{1 - 0,8 \cdot \operatorname{tg} 2}}$$

$$v_{kl} = 44,97 \frac{m}{s} = 161,9 \frac{km}{h}$$

b) mokar asfalt ($\varphi = 0,6$)

$$v_{pr} = \sqrt{Rg \cdot \frac{s + h_T \operatorname{tg} \beta}{h_T - s \operatorname{tg} \beta}}$$

$$v_{pr} = \sqrt{240 \cdot 9,81 \cdot \frac{0,64 + 0,45 \cdot \operatorname{tg} 2}{0,45 - 0,64 \cdot \operatorname{tg} 2}}$$

$$v_{pr} = 60,1 \frac{m}{s} = 216,3 \frac{km}{h}$$

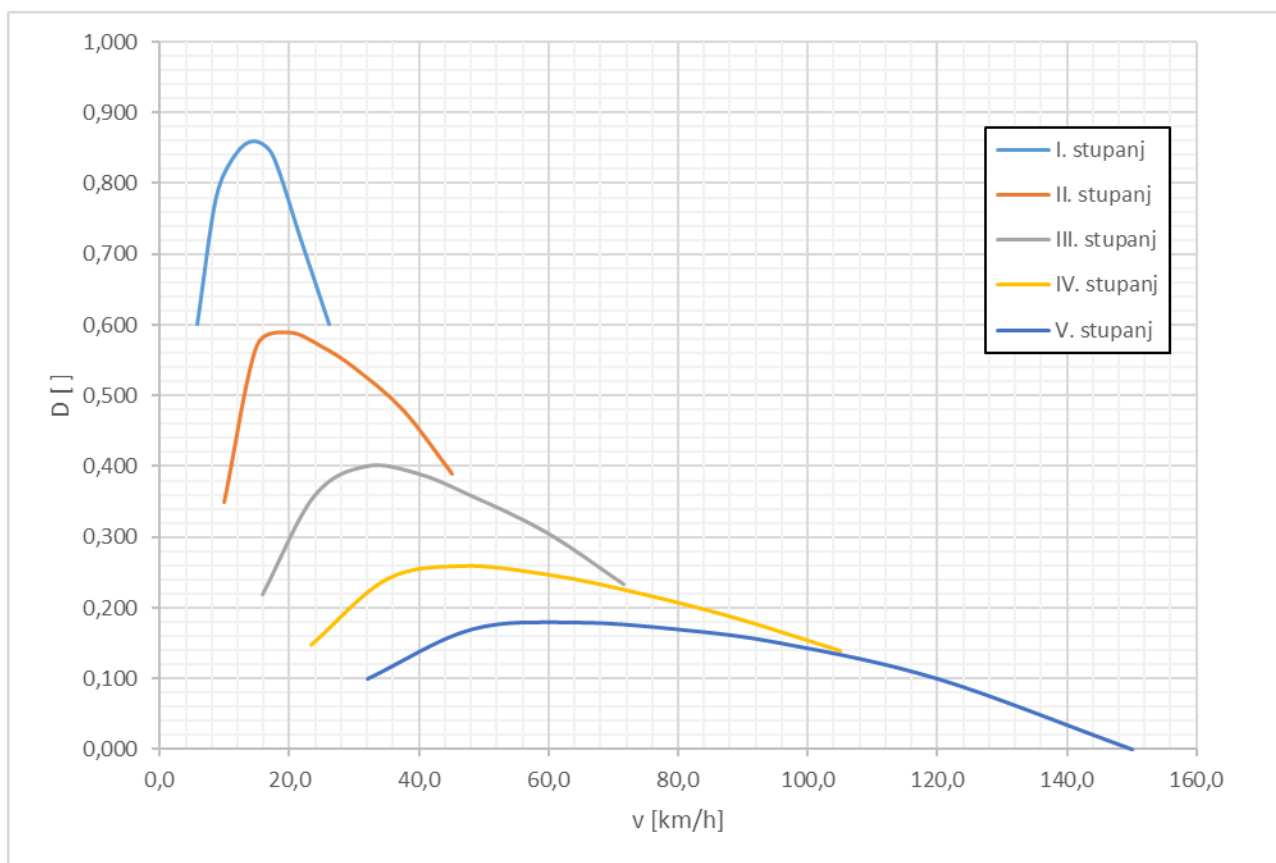
$$v_{kl} = \sqrt{Rg \cdot \frac{\varphi + \operatorname{tg} \beta}{1 - \varphi \operatorname{tg} \beta}}$$

$$v_{kl} = \sqrt{240 \cdot 9,81 \cdot \frac{0,6 + \operatorname{tg} 2}{1 - 0,6 \cdot \operatorname{tg} 2}}$$

$$v_{kl} = 39,1 \frac{m}{s} = 140,7 \frac{km}{h}$$

6. UBRZANJE VOZILA

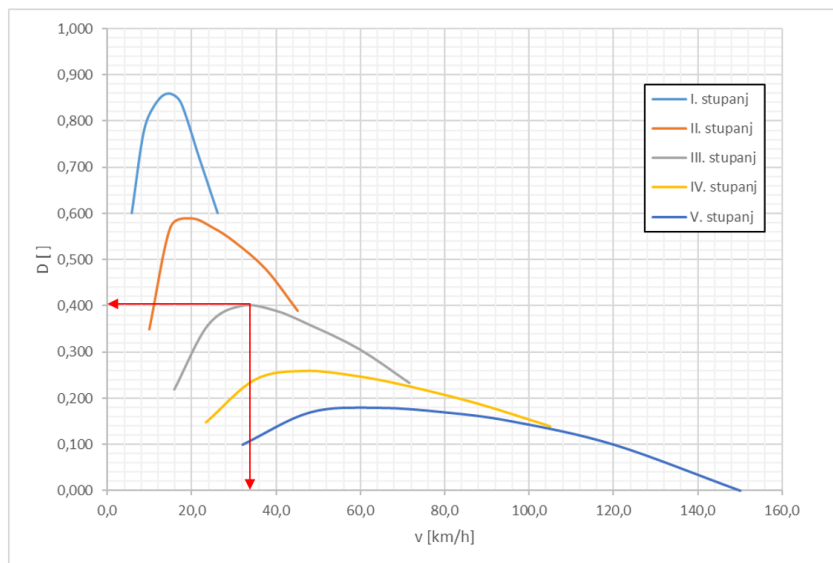
6.1. Za vozilo je zadana dinamička karakteristika. Potrebno je odrediti najveći uspon koji vozilo može savladati u III. stupnju prijenosa, ako je faktor otpora kotrljanja jednak 0,014.



Slika 33

Rješenje:

Iz dijagrama se očita maksimalni dinamički faktor u III. stupnju prijenosa povlačenjem paralele s apscisom u tjemenu krivulje za III. stupanj prijenosa:



Slika 34

Maksimalni dinamički faktor u III. stupnju prijenosa:

$$D_{max} = 0,4$$

Pri brzini:

$$v = 34 \text{ km/h}$$

Maksimalni dinamički faktor odgovara:

$$D_{max} = f_k \cos \alpha + \sin \alpha$$

Za male kutove vrijedi: $\cos \alpha \approx 1$, $\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha$

$$D_{max} = f_k + \operatorname{tg} \alpha$$

Uspón je jednak $u \approx \operatorname{tg} \alpha$

$$D_{max} = f_k + u$$

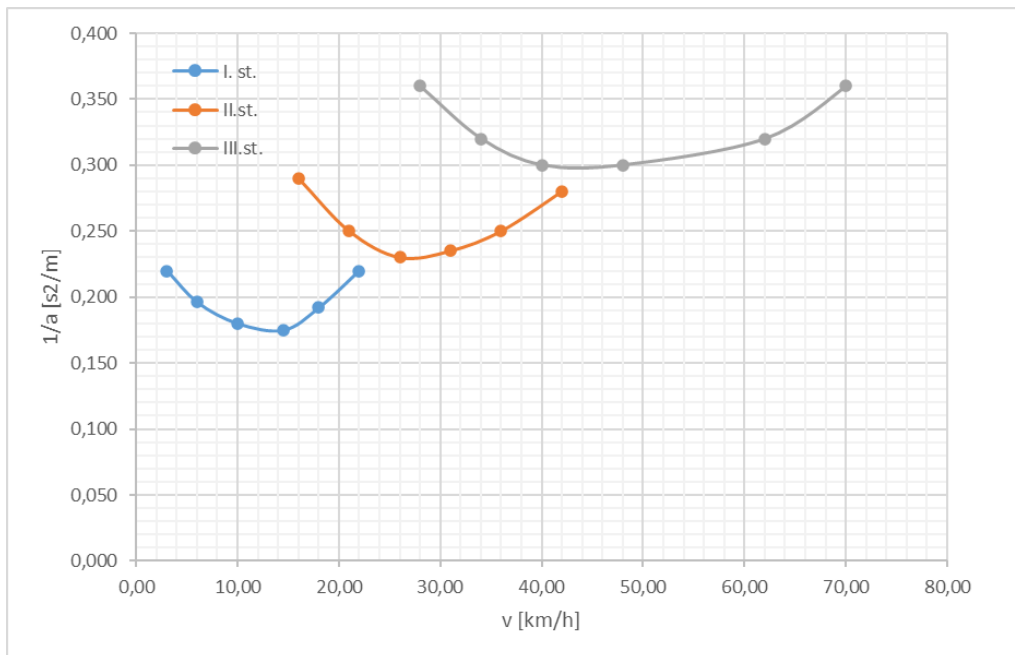
$$u_{max} = D_{max} - f_k = 0,4 - 0,014 = 0,386 = 38,6 \%$$

Vozilo dakle, može savladati maksimalni uspon od 38,6 % u III. stupnju prijenosa pri brzini od 34 km/h. Navedeni uspon odgovara kutu od:

$$\alpha_{max} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} u$$

$$\alpha_{max} = 21,1^\circ$$

6.2. Za vozilo je zadan dijagram recipročnih ubrzanja. Koliko je vremena potrebno vozilu da ubrza iz stanja mirovanja do brzine 70 km/h?



Slika 35

Rješenje:

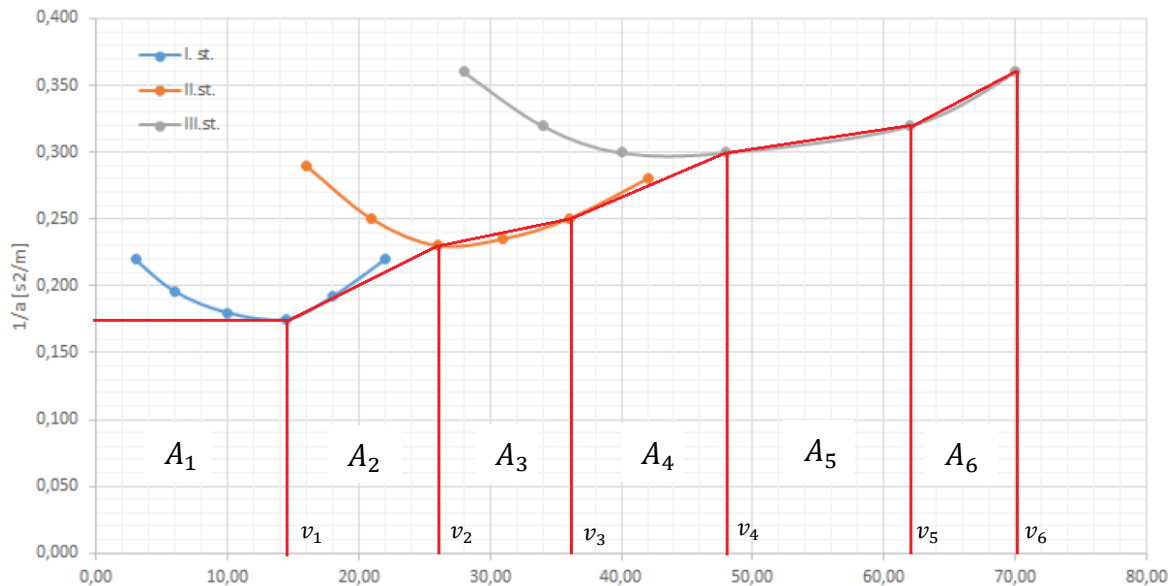
Definicija ubrzanja je „brzina“ promjene brzine kretanja, odnosno derivacija brzine po vremenu:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Što znači da je vrijeme potrebno za ubrzanje vozila iz stanja mirovanja, ($v = 0$ km/h) do brzine v jednako integralu recipročnog ubrzanja od brzine $v = 0$ do brzine v :

$$t = \int_0^v \frac{1}{a} \cdot dv$$

Budući da integral predstavlja površinu ispod krivulje, vrijeme ubrzanja se može riješiti tako da se izračuna površina ispod krivulje u $\frac{1}{a}(v)$ dijagramu. Integral će se riješiti grafičkom metodom tako da se izračuna površina pravokutnika A_1 , te površina trapeza A_2, A_3, A_4, A_5 i A_6 .



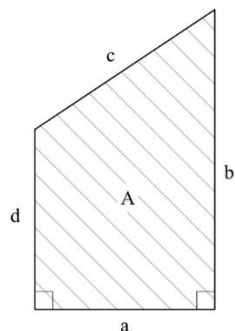
Slika 36

Kod računanja vremena ubrzanja vozila pretpostavlja se da stupnjevi prijenosa mijenjaju u viši stupanj u trenutku kad se postigne maksimalna brzina u tom stupnju, vrijeme promjene stupnja prijenosa je zanemarivo, te da nema proklizavanja kotača osim u prvom stupnju prijenosa.

Pretpostavlja se da vrijeme proklizavanja traje do postizanja brzine $v_1 = 14,5$ km/h koja odgovara najvećem ubrzanju u prvom stupnju prijenosa, odnosno najmanjem recipročnom ubrzanju, u ovom slučaju $\frac{1}{a_1} = 0,175$ s^2/m . Ovo vrijeme se može izračunati tako da se izračuna površina A_1 . Budući da je brzina zadana u km/h, potrebno je preračunati u m/s dijeljenjem s 3,6. Izraz u konačnici izgleda:

$$\Delta t_1 = A_1 = \frac{1}{3,6} v_1 \cdot \frac{1}{a_1} = \frac{1}{3,6} \cdot 14,5 \cdot 0,175 = 0,705 \text{ s}$$

Površina trapeza A_2 do A_6 predstavlja vrijeme Δt_i za ubrzavanje vozila od brzine v_{i-1} do brzine v_i . Površina trapeza računa se prema:



$$A_{trapez} = (b + d) \cdot \frac{1}{2} \cdot a$$

Slika 37

Brzinu je ponovno potrebno preračunati iz km/h u m/s, pa izraz za računanje površine općenito izgleda:

$$\Delta t_i = A_i = \left(\frac{v_i - v_{i-1}}{3,6} \right) \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_i} + \frac{1}{a_{i-1}} \right)$$

Iz dijagrama je očitano:

$$v_1 = 14,5 \text{ km/h}; \quad \frac{1}{a_1} = 0,175 \text{ s}^2/\text{m}$$

$$v_2 = 26 \text{ km/h}; \quad \frac{1}{a_2} = 0,230 \text{ s}^2/\text{m}$$

$$v_3 = 36 \text{ km/h}; \quad \frac{1}{a_3} = 0,250 \text{ s}^2/\text{m}$$

$$v_4 = 48 \text{ km/h}; \quad \frac{1}{a_4} = 0,300 \text{ s}^2/\text{m}$$

$$v_5 = 62 \text{ km/h}; \quad \frac{1}{a_5} = 0,320 \text{ s}^2/\text{m}$$

$$v_6 = 70 \text{ km/h}; \quad \frac{1}{a_6} = 0,360 \text{ s}^2/\text{m}$$

Dakle, vrijeme potrebno za ubrzanje od brzine v_{i-1} do brzine v_i jest:

$$\Delta t_2 = A_2 = \left(\frac{v_2 - v_1}{3,6} \right) \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_1} \right) = \left(\frac{26 - 14,5}{3,6} \right) \cdot \frac{1}{2} (0,230 + 0,175) = 0,647 \text{ s}$$

$$\Delta t_3 = A_3 = \left(\frac{v_3 - v_2}{3,6} \right) \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_2} \right) = \left(\frac{36 - 26}{3,6} \right) \cdot \frac{1}{2} (0,250 + 0,230) = 0,667 \text{ s}$$

$$\Delta t_4 = A_4 = \left(\frac{v_4 - v_3}{3,6} \right) \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_3} \right) = \left(\frac{48 - 36}{3,6} \right) \cdot \frac{1}{2} (0,300 + 0,250) = 0,917 \text{ s}$$

$$\Delta t_5 = A_5 = \left(\frac{v_5 - v_4}{3,6} \right) \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_5} + \frac{1}{a_4} \right) = \left(\frac{62 - 48}{3,6} \right) \cdot \frac{1}{2} (0,320 + 0,300) = 1,206 \text{ s}$$

$$\Delta t_6 = A_6 = \left(\frac{v_6 - v_5}{3,6} \right) \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_6} + \frac{1}{a_5} \right) = \left(\frac{70 - 62}{3,6} \right) \cdot \frac{1}{2} (0,360 + 0,320) = 0,756 \text{ s}$$

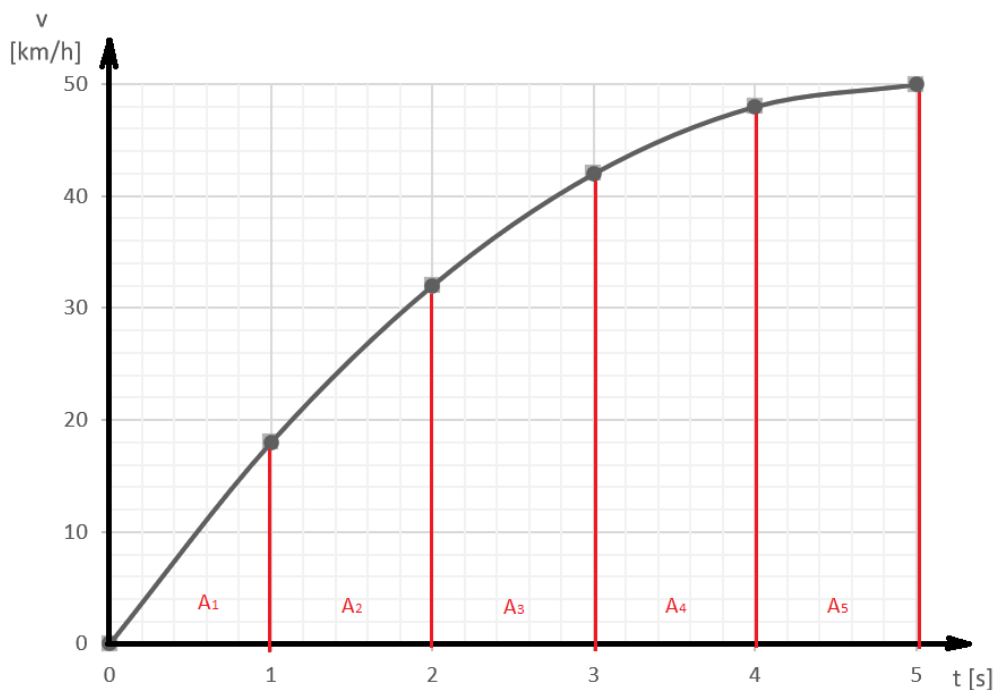
Ukupno vrijeme je zbroj svih vremena t_i :

$$t = \sum t_i = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6$$

$$t = 0,705 + 0,647 + 0,667 + 0,917 + 1,206 + 0,756 = 4,898 \text{ s}$$

Točnije rješenje može se dobiti tako da se površina ispod krivulje podijeli na veći broj površina.

6.3. Za vozilo je zadan dijagram $v(t)$. Koliki put vozilo prevali dok ubrzava iz stanja mirovanja do brzine 50 km/h?



Slika 38

Rješenje:

Brzina je definirana derivacijom puta po vremenu:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

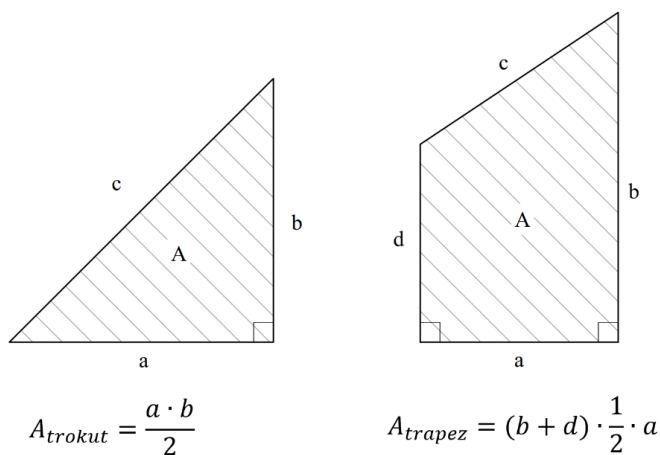
Što znači da je prijeđeni put s za vrijeme ubrzavanja od trenutka $t = 0$ do vremena t kad se postigne zadana brzina jednak:

$$s = \int_0^t v \cdot dt$$

Budući da je brzina v u funkciji od vremena t zadana dijagramom $v(t)$, integral se rješava grafičkom metodom tako da se izračuna ukupna površina ispod krivulje:

$$s_{uk} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$$

Površine se mogu aproksimirati kao zbroj jednog pravokutnog trokuta i četiri trapeza. Površina pravokutnog trokuta i trapeza se računaju po poznatim izrazima:



Slika 39

Iz dijagrama je očitano:

$$t_0 = 0 \text{ s}; \quad v_0 = 0 \text{ km/h}$$

$$t_1 = 1 \text{ s}; \quad v_1 = 18 \text{ km/h}$$

$$t_2 = 2 \text{ s}; \quad v_2 = 32 \text{ km/h}$$

$$t_3 = 3 \text{ s}; \quad v_3 = 42 \text{ km/h}$$

$$t_4 = 4 \text{ s}; \quad v_4 = 48 \text{ km/h}$$

$$t_5 = 5 \text{ s}; \quad v_5 = 50 \text{ km/h}$$

Površina pravokutnog trokuta se računa po izrazu, s tim da je brzinu potrebno pretvoriti u m/s:

$$\Delta s_1 = A_1 = \frac{t_1 \cdot v_1}{2} = \frac{1 \cdot \frac{18}{3,6}}{2} = 2,5 \text{ m}$$

Površina trapeza se računa po izrazu, s tim da je brzine potrebno pretvoriti u m/s:

$$\Delta s_2 = A_2 = \frac{1}{3,6} (v_2 + v_1) \cdot \frac{1}{2} \cdot (t_2 - t_1)$$

$$\Delta s_2 = A_2 = \frac{1}{3,6} (32 + 18) \cdot \frac{1}{2} \cdot (2 - 1) = 6,9 \text{ m}$$

$$\Delta s_3 = A_3 = \frac{1}{3,6} (v_3 + v_2) \cdot \frac{1}{2} \cdot (t_3 - t_2)$$

$$\Delta s_3 = A_3 = \frac{1}{3,6} (42 + 32) \cdot \frac{1}{2} \cdot (3 - 2) = 10,3 \text{ m}$$

$$\Delta s_4 = A_4 = \frac{1}{3,6} (v_4 + v_3) \cdot \frac{1}{2} \cdot (t_4 - t_3)$$

$$\Delta s_4 = A_4 = \frac{1}{3,6} (48 + 42) \cdot \frac{1}{2} \cdot (4 - 3) = 12,5 \text{ m}$$

$$\Delta s_5 = A_5 = \frac{1}{3,6} (v_5 + v_4) \cdot \frac{1}{2} \cdot (t_5 - t_4)$$

$$\Delta s_5 = A_5 = \frac{1}{3,6} (50 + 48) \cdot \frac{1}{2} \cdot (5 - 4) = 13,6 \text{ m}$$

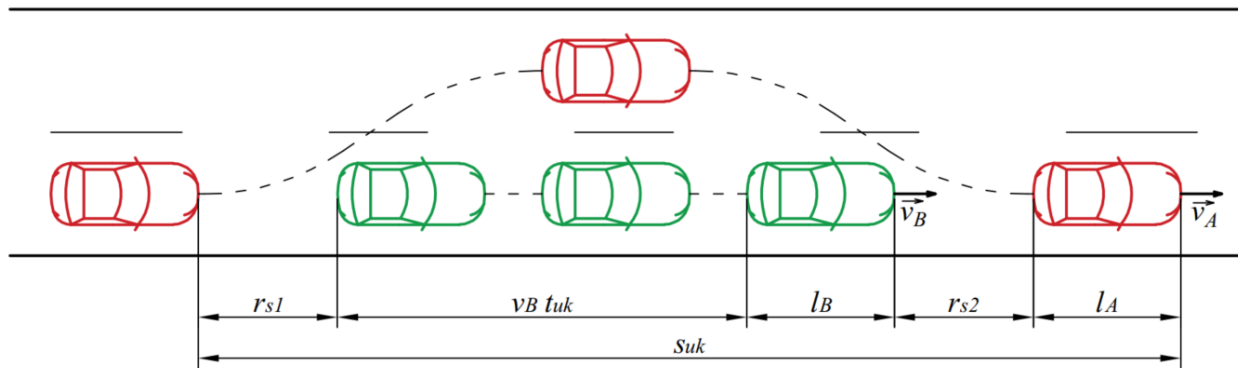
$$s_{uk} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$$

$$s_{uk} = 2,5 + 6,9 + 10,3 + 12,5 + 13,6 = 45,8 \text{ m}$$

6.4. Automobil A nalazi se na sigurnosnom razmaku od $r_{s1} = 30$ m iza automobila B. Koliki je put i vrijeme pretjecanja automobila A, koje pretječe automobil B koji se kreće brzinom 72 km/h ako:

- vozilo A se kreće konstantnom brzinom $v_A = 90$ km/h;
- vozilo A se kreće s konstantnim ubrzanjem $a = 1,2$ m/s², a početna brzina vozila A je jednaka brzini kretanja vozila B ($v_{Ap} = v_B$)?

Zadano: duljina automobila A $l_A = 4,34$ m, duljina automobila B $l_B = 4,22$ m. Automobil A će se prestrojiti natrag u desnu traku kada bude na sigurnosnom razmaku $r_{s2} = 30$ m ispred automobila B.



Slika 40

Rješenje:

Ukupan put pretjecanja jednak je zbroju udaljenosti vozila prije i nakon pretjecanja, duljine oba vozila i duljine puta koju prijeđe vozilo B za vrijeme pretjecanja:

$$S_{uk} = r_{s1} + v_B t_{uk} + l_B + r_{s2} + l_A$$

Također, ukupan put pretjecanja konstantnom brzinom može se dobiti iz izraza:

$$S_{uk} = v_A \cdot t_{uk}$$

Izjednačavanjem desnih strana ovih jednadžbi dobije se:

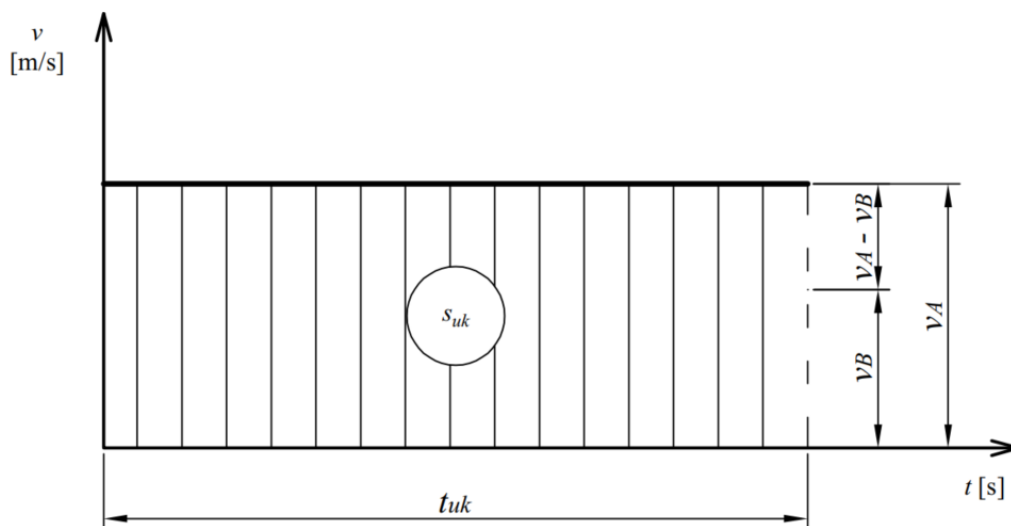
$$v_A \cdot t_{uk} = r_{s1} + v_B \cdot t_{uk} + l_B + r_{s2} + l_A$$

$$v_A \cdot t_{uk} - v_B \cdot t_{uk} = r_{s1} + l_B + r_{s2} + l_A$$

$$t_{uk} = \frac{r_{s1} + l_B + r_{s2} + l_A}{v_A - v_B} = \frac{30 + 4,22 + 30 + 4,34}{\frac{90}{3,6} - \frac{72}{3,6}} = 13,7 \text{ s}$$

$$s_{uk} = v_A \cdot t_{uk} = \frac{90}{3,6} \cdot 13,7 = 342,5 \text{ m}$$

Zadatak se može riješiti i grafički, računanjem površine ispod krivulje na $v(t)$ dijagramu:



Slika 41

Prema čemu ukupan put pretjecanja izgleda:

$$s_{uk} = v_A t_{uk}$$

$$v_A \cdot t_{uk} = r_{s1} + v_B \cdot t_{uk} + l_B + r_{s2} + l_b$$

Ostatak zadatka se rješava na isti način kao i iznad.

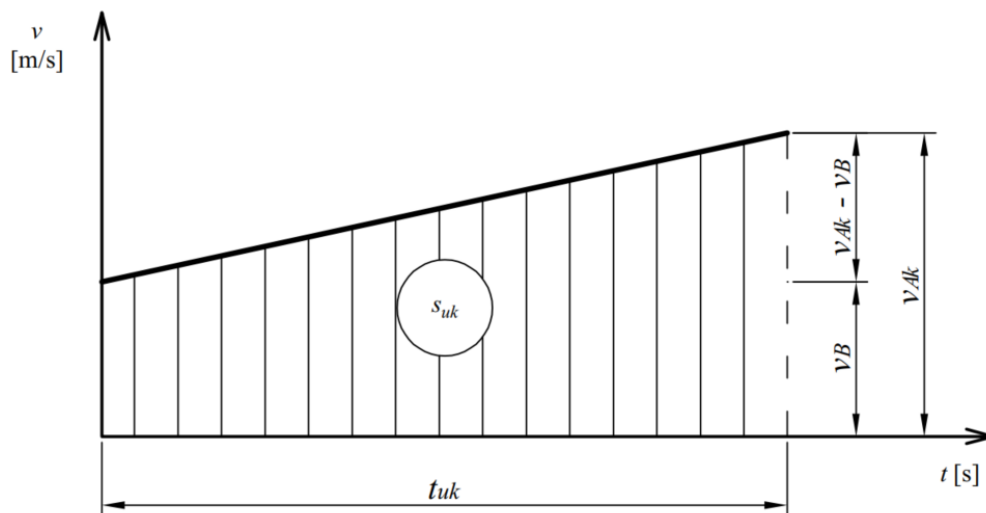
b) Ako se vozilo A kreće s konstantnim ubrzanjem a i ima početnu brzinu v_{Ap} koja je jednaka brzini kretanja vozila B, onda je konačna brzina pretjecanja vozila A v_{Ak} jednaka:

$$v_{Ak} = v_{Ap} + a \cdot t_{uk}$$

Ukupan put koji prijeđe vozilo A definiran je kao i u prethodnom slučaju:

$$s_{uk} = r_{s1} + v_B t_{uk} + l_B + r_{s2} + l_A$$

Ukupan put se može izračunati i iz površine ispod krivulje na $v(t)$ dijagramu:



Slika 42

Prema tome ukupan put je zbroju površine kvadra i pravokutnog trokuta:

$$s_{uk} = v_B t_{uk} + \frac{1}{2} (v_{Ak} - v_B) t_{uk}$$

Ako se u ovu jednadžbu uvrsti čemu je konačna brzina automobila A jednaka, dobije se:

$$s_{uk} = v_B t_{uk} + \frac{1}{2} (v_{Ap} + a \cdot t_{uk} - v_B) t_{uk}$$

Budući da su brzine v_{Ap} i v_B jednake:

$$s_{uk} = v_B t_{uk} + \frac{1}{2} (a \cdot t_{uk}) t_{uk}$$

$$s_{uk} = v_B t_{uk} + \frac{1}{2} a \cdot t_{uk}^2$$

Kada se izjednače jednačbe za ukupan prijeđeni put, dobije se:

$$v_B t_{uk} + \frac{1}{2} a \cdot t_{uk}^2 = r_{s1} + v_B t_{uk} + l_B + r_{s2} + l_A$$

Iz čega je ukupno vrijeme:

$$t_{uk} = \sqrt{\frac{2(r_{s1} + l_B + r_{s2} + l_A)}{a}}$$

$$t_{uk} = \sqrt{\frac{2(30 + 4,22 + 30 + 4,34)}{1,2}} = 10,7 \text{ s}$$

Što znači da je:

$$s_{uk} = v_B t_{uk} + \frac{1}{2} a \cdot t_{uk}^2$$

$$s_{uk} = \frac{72}{3,6} \cdot 10,7 + \frac{1}{2} \cdot 1,2 \cdot 10,7^2$$

$$s_{uk} = 282,7 \text{ m}$$

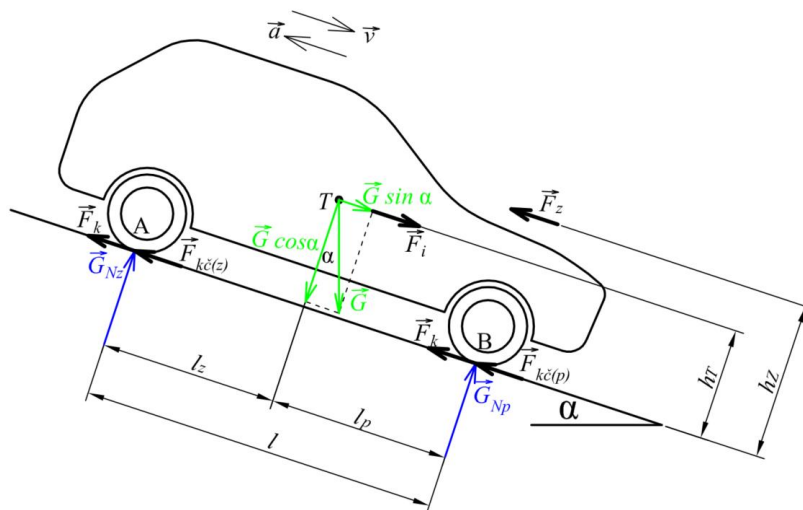
7. KOČENJE VOZILA

7.1. Vozilo koči po cesti s uzdužnim padom (nizbrdica). Vozilo ima kočnice na prednjoj i stražnjoj osovini.

Za vozilo je zadano: $G = 15\,200\text{ N}$; $l_p = 1\text{ m}$; $l_z = 1,67\text{ m}$; $h_T = 0,65\text{ m}$; $f = 0,02$; $\alpha = 5^\circ$.

Ako se faktor prijanjanja u potpunosti iskorištava, potrebno je odrediti:

- normalne reakcije podloge i maksimalnu silu kočenja na obje osovine za faktor prijanjanja u rasponu $\varphi = 0,2 - 1$;
- u dijagramu prikazati ovisnost sila kočenja i normalnih reakcije podloge o faktoru prijanjanja;
- faktor raspodjele sile kočenja za $\varphi = 0,6$.



Slika 43

Rješenje:

Zbog usporavanja vozila iz težišta automobila djeluje sila inercije (D'Alembertova sila koja je uvijek usmjerena suprotno od ubrzanja vozila). U ovom slučaju inercijska sila je usmjerena u smjeru gibanja vozila. Sile kočenja na prednjoj ($F_{k(p)}$) i stražnjoj osovini ($F_{k(z)}$) djeluju na kotače vozila u ravnini podloge, suprotno usmjerene od brzine kretanja vozila. Sila inercije i težina vozila na nizbrdici povećavaju opterećenje na prednjoj osovini, a smanjuju opterećenje na stražnjoj.

a)

Iz uvjeta ravnoteže momenata oko točke A dobije se:

$$G_{Np} l - G \cos \alpha l_z - G \sin \alpha h_T - F_i h_T + F_z h_Z = 0$$

$$G_{Np} l = G \cos \alpha l_z + G \sin \alpha h_T + F_i h_T - F_z h_z$$

Iz uvjeta ravnoteže momenata oko točke B dobije se:

$$-G_{Nz} l + G \cos \alpha l_p - G \sin \alpha h_T - F_i h_T + F_z h_z = 0$$

$$G_{Nz} l = G \cos \alpha l_p - G \sin \alpha h_T - F_i h_T + F_z h_z$$

Pretpostavi će se da je $h_T \approx h_z$ što znači da su normalne reakcije podloge:

$$G_{Np} = \frac{G \cos \alpha l_z + G \sin \alpha h_T + F_i h_T - F_z h_T}{l}$$

$$G_{Nz} = \frac{G \cos \alpha l_p - G \sin \alpha h_T - F_i h_T + F_z h_T}{l}$$

$$G_{Np} = \frac{G \cos \alpha l_z + (G \sin \alpha + F_i - F_z) h_T}{l}$$

$$G_{Nz} = \frac{G \cos \alpha l_p - (G \sin \alpha + F_i - F_z) h_T}{l}$$

Iz uvjeta ravnoteže svih sila u pravcu kretanja dobije se:

$$-F_k + G \sin \alpha + F_i - F_z - F_{k\check{c}(z)} - F_{k\check{c}(p)} = 0$$

Ako je ukupna sila kočenja:

$$F_{k\check{c}} = F_{k\check{c}(p)} + F_{k\check{c}(z)}$$

$$F_{k\check{c}} + F_k = G \sin \alpha + F_i - F_z$$

Sila otpora kotrljanja se može prikazati kao:

$$F_k = G \cos \alpha f$$

Onda je:

$$G_{Np} = \frac{G \cos \alpha l_z + (F_{k\check{c}} + G \cos \alpha f) h_T}{l}$$

$$G_{Nz} = \frac{G \cos \alpha l_p - (F_{k\check{c}} + G \cos \alpha f) h_T}{l}$$

Maksimalna sila kočenja na obje osovine

$$F_{k\check{c}} = G \cos \alpha \varphi$$

$$G_{Np} = \frac{G \cos \alpha l_z + (G \cos \alpha \varphi + G \cos \alpha f) h_T}{l}$$

$$G_{Np} = G \cos \alpha \frac{(l_z + (\varphi + f)h_T)}{l}$$

$$G_{Nz} = \frac{G \cos \alpha l_p - (G \cos \alpha \varphi + G \cos \alpha f) h_T}{l}$$

$$G_{Nz} = G \cos \alpha \frac{l_p - (\varphi + f) h_T}{l}$$

Sile kočenja po osovinaama mogu se dobiti:

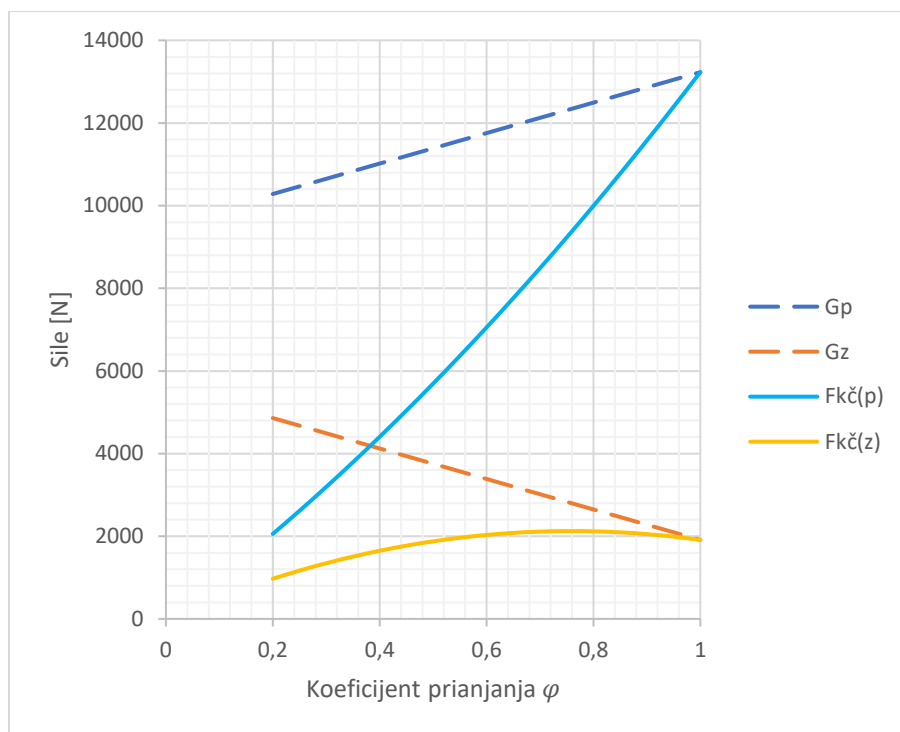
$$F_{k\check{c}(p)} = \varphi G_{Np}$$

$$F_{k\check{c}(z)} = \varphi G_{Nz}$$

Rezultati su prikazani tablično:

φ	G_{Np} [N]	G_{Nz} [N]	$F_{k\check{c}(p)}$ [N]	$F_{k\check{c}(z)}$ [N]
0,2	10282	4860	2056	972
0,3	10651	4492	3195	1347
0,4	11019	4123	4408	1649
0,5	11388	3754	5694	1877
0,6	11756	3386	7054	2031
0,7	12125	3017	8488	2112
0,8	12494	2648	9995	2119
0,9	12862	2280	11576	2052
1	13231	1911	13231	1911

b) Dijagram ovisnost sila kočenja i normalnih reakcija podloge o faktoru prijanjanja:



Slika 44

c) Faktor raspodjele kočenja je omjer sile kočenja na prednjoj i stražnjoj osovini pri faktoru prijanjanja $\varphi = 0,6$:

Budući da je već izračunato, iz tablice se očitava:

$$G_{Np} = 11\,756\,N$$

$$G_{Nz} = 3\,386\,N$$

$$F_{k\check{c}(p)} = 7\,054\,N$$

$$F_{k\check{c}(z)} = 2\,031\,N$$

$$K = \frac{F_{k\check{c}(p)}}{F_{k\check{c}(z)}} = \frac{7\,054}{2\,031} = 3,47$$

7.2. Za vozilo iz prethodnog zadatka potrebno je odrediti:

- maksimalno usporenje na horizontalnoj podlozi ako je faktor prijanjanja $\varphi = 0,8$
- put (s_k) i vrijeme (t_k) kočenja do zaustavljanja ($v_2 = 0$ km/h) ako je početna brzina vozila iznosi $v_1 = 90$ km/h

Rješenje:

- Kod kočenja pri malim i srednjim brzinama sila otpora zraka se može zanemariti ($F_z = 0$), a maksimalno usporenje se može dobiti iz izraza:

$$F_i = m a \delta' = F_{k\check{c}} + F_k$$

$$\frac{G}{g} a \delta' = G \varphi + G f$$

$$a_{k \max} = \frac{g (\varphi + f)}{\delta'}$$

Utjecaj rotirajućih masa kod kočenja je bitno manji nego kod ubrzavanja ($\delta' < \delta$), jer se kočenje odvija s isključenom spojkom, stoga se može zanemariti ($\delta' = 1$).

$$a_{k \max} = \frac{9,81 (0,8 + 0,02)}{1} = 8,04 \text{ m/s}^2$$

Kako je faktor otpora kotrljanja bitno manji od faktora prijanjanja ($f \ll \varphi$), često se može zanemariti, te se u konačnici maksimalno usporenje može dobiti iz izraza:

$$a_{k \max} = g \varphi$$

Iz navedenog može se zaključiti da je maksimalno usporenje koje vozilo može postići kod ekstremnog faktora prijanjanja ($\varphi = 1$) jednako $9,81 \text{ m/s}^2$. U praksi su maksimalna usporenja manja zbog nesavršenog stanja kolnika, ali kod osobnih vozila ne smiju iznositi manje od $5,8 \text{ m/s}^2$. [1]

- Put zaustavljanja se može dobiti iz poznatog izraza za usporeno gibanje:

$$v_1^2 = v_0^2 \pm 2 a s$$

Gdje usporenje odgovara maksimalnom usporenju ($a = a_{k \max}$), a put odgovara putu kočenja ($s = s_k$):

$$v_1^2 = v_0^2 \pm 2 a_{k \max} s_k$$

Kako vozilo usporava do zaustavljanja, konačna brzina je nula, izraz u konačnici izgleda ovako:

$$s_k = \frac{v_0^2}{2 a_{k \max}}$$

$$s_k = \frac{(90/3,6)^2}{2 \cdot 8,04} = 38,9 \text{ m}$$

Iz navedenog se može zaključiti kako put zaustavljanja ne ovisi o težini vozila, već o kvadratu početne brzine kretanja, a smanjuje se s faktorom prijanjanja (o kojem ovisi maksimalno usporenje).

Vrijeme kočenja se također može dobiti iz poznatog izraza za usporeno gibanje:

$$a = \frac{v}{t}$$

Odnosno, vrijeme kočenja je omjer početne brzine kretanja i maksimalnog usporenja:

$$t_k = \frac{v_0}{a_{k \max}}$$

$$t_k = \frac{25}{8,04} = 3,12 \text{ s}$$

Navedeno vrijeme uzima u obzir samo vrijeme usporavanja vozila, od trenutka kada je vozač pritisnuo papučicu kočnice do zaustavljanja. Ukupno vrijeme zaustavljanja se povećava za vrijeme reagiranja (t_R), odnosno vrijeme otkako vozač uoči prepreku na cesti do pritiska papučice kočnice.

$$t_{uk} = t_R + t_k$$

7.3. Za vozilo koje usporava na horizontalnoj cesti do zaustavljanja potrebno je:

- odrediti faktor raspodjele sile kočenja;
- skicirati dijagram ovisnosti puta i vremena kočenja o početnoj brzini vozila za brzine od nula do 200 km/h.

Za vozilo je zadano:

$G = 12\,900\text{ N}$; $l_p = 1,02\text{ m}$; $l_z = 1,53\text{ m}$; $h_T = 0,5\text{ m}$; $f = 0,014$. Faktor prijanjanja između kotača i podloge je $\varphi = 0,75$. Utjecaj rotirajućih masa kod kočenja se može zanemariti ($\delta' = 1$).

Rješenje:

- Faktor raspodjele kočenja je omjer sile kočenja na prednjoj i stražnjoj osovini:

$$G_p = G \frac{l_z + (\varphi + f)h_T}{l} = 12\,900 \frac{1,53 + (0,75 + 0,014) \cdot 0,5}{(1,02 + 1,53)} = 9\,672,5\text{ N}$$

$$G_z = G \frac{l_p - (\varphi + f)h_T}{l} = 12\,900 \frac{1,02 - (0,75 + 0,014) \cdot 0,5}{(1,02 + 1,53)} = 3\,227,5\text{ N}$$

$$F_{k\check{(p)}} = \varphi G_p = 0,75 \cdot 9\,672,5 = 7254,4\text{ N}$$

$$F_{k\check{(z)}} = \varphi G_z = 0,75 \cdot 3\,227,5 = 2\,420,6\text{ N}$$

$$K = \frac{F_{k\check{(p)}}}{F_{k\check{(z)}}} = 3$$

- Dijagram ovisnosti puta i vremena kočenja

$$a_{k\max} = \frac{g(\varphi + f)}{\delta'} = \frac{9,81 \cdot (0,75 + 0,014)}{1} = 7,49\text{ m/s}^2$$

$$s_k = \frac{v_0^2}{2 a_{k\max}}$$

$$t_k = \frac{v_0}{a_{k \max}}$$

Za skiciranje dijagrama izračunat će se put i vrijeme kočenja za 5 karakterističnih brzina: 40, 80, 120, 160 i 200 km/h.

$$s_{k(40)} = \frac{v_{40}^2}{2 a_{k \max}} = 8 \text{ m}$$

$$t_{k(40)} = \frac{v_{40}}{a_{k \max}} = 1,48 \text{ s}$$

$$s_{k(80)} = \frac{v_{80}^2}{2 a_{k \max}} = 33 \text{ m}$$

$$t_{k(80)} = \frac{v_{80}}{a_{k \max}} = 2,97 \text{ s}$$

$$s_{k(120)} = \frac{v_{120}^2}{2 a_{k \max}} = 74 \text{ m}$$

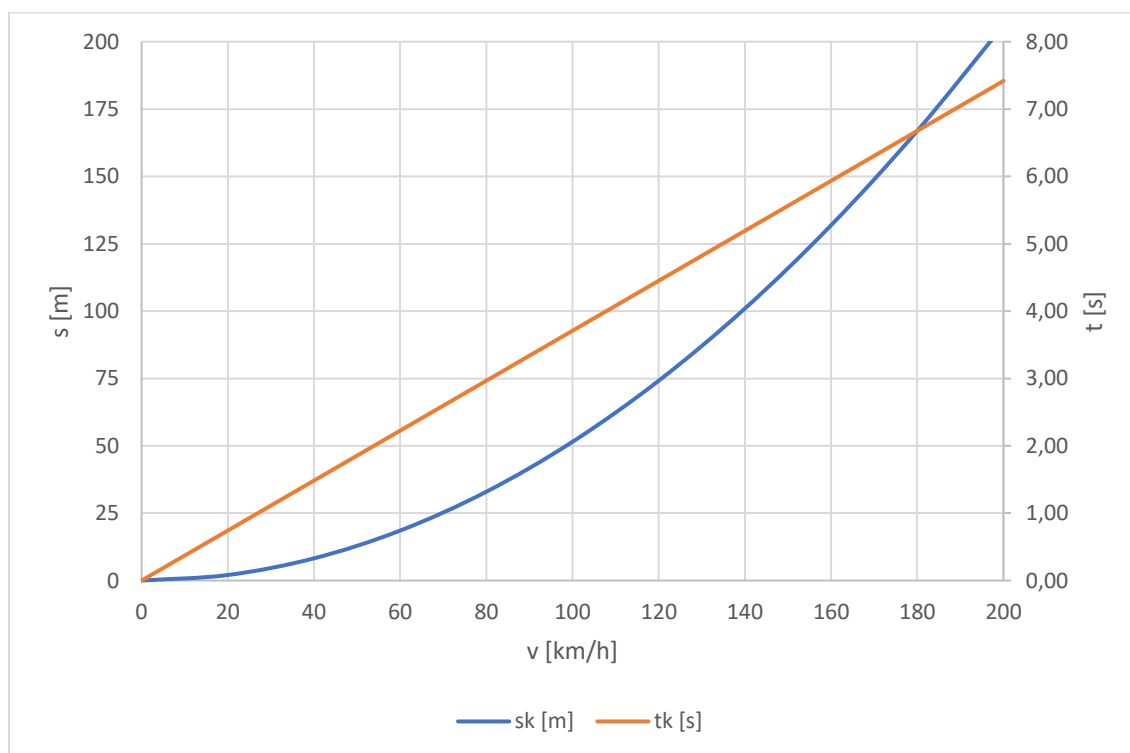
$$t_{k(120)} = \frac{v_{120}}{a_{k \max}} = 4,45 \text{ s}$$

$$s_{k(160)} = \frac{v_{160}^2}{2 a_{k \max}} = 132 \text{ m}$$

$$t_{k(160)} = \frac{v_{160}}{a_{k \max}} = 5,93 \text{ s}$$

$$s_{k(200)} = \frac{v_{200}^2}{2 a_{k \max}} = 206 \text{ m}$$

$$t_{k(200)} = \frac{v_{200}}{a_{k \max}} = 7,42 \text{ s}$$



Slika 45

7.4. Na cesti su uočeni tragovi kočenja duljine 32 metra. Kolika je bila minimalna početna brzina vozila ako je faktor prijanjanja $\varphi = 0,8$; faktor otpora kotrljanja 0,018; te ako se faktor rotirajućih masa može zanemariti?

Rješenje:

$$a_{k \max} = \frac{g (\varphi + f)}{\delta'} = \frac{9,81(0,8 + 0,018)}{1} = 8,02 \text{ m/s}^2$$

$$s_k = \frac{v_0^2}{2 a_{k \max}}$$

$$v_{0 \min} = \sqrt{2 a_{k \max} s_k} = \sqrt{2 \cdot 8,02 \cdot 32} = 22,66 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 81,56 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

7.5. U trenutku kada je vozač ugledao prepreku na cesti vozilo se kretalo brzinom 162 km/h. Vozaču je bilo potrebno 0,6 s da pritisne papučicu kočnice, a sustavu za kočenje još 0,2 s da postigne maksimalni iznos usporenja.

a) Koliko je ukupno vremena potrebno da se vozilo u potpunosti zaustavi i koliki je put pri tom vozilo prevalo ako je faktor prijanjanja $\varphi = 0,82$; faktor otpora kotrljanja $f = 0,014$; a faktor rotirajućih masa se može zanemariti?

b) Koliki bi bili put i vrijeme zaustavljanja da je vozač vozio po mokroj cesti ($\varphi = 0,53$; $f = 0,014$)?

Rješenje:

a) Vrijeme reagiranja vozača i sustava kočenja je ukupno vrijeme otkako je vozač ugledao prepreku na cesti, pa do postizanja maksimalnog usporenja i iznosi:

$$t_R = t_1 + t_2 = 0,6 + 0,2 = 0,8 \text{ s}$$

Prijeđeni put za to vrijeme je:

$$s_R = v_0 t_R = \frac{162}{3,6} \cdot 0,8 = 36 \text{ m}$$

Maksimalno usporenje je:

$$a_{k \max} = \frac{g (\varphi + f)}{\delta'} = \frac{9,81(0,82 + 0,014)}{1} = 8,18 \text{ m/s}^2$$

Vrijeme kočenja vozila do zaustavljanja je:

$$t_k = \frac{v_0}{a_{k \max}} = \frac{\frac{162}{3,6}}{8,18} = 5,5 \text{ s}$$

Prijeđeni put kočenja:

$$s_k = \frac{v_0^2}{2 a_{k \max}} = \frac{\left(\frac{162}{3,6}\right)^2}{2 \cdot 8,18} = 123,8 \text{ m}$$

Što znači da je ukupno vrijeme i put zaustavljanja:

$$t_{uk} = t_R + t_k = 0,8 + 5,5 = 6,3 \text{ s}$$

$$s_{uk} = s_R + s_k = 36 + 123,8 = 159,8 \text{ m}$$

b) Kada bi vozač vozio po mokroj cesti, put i vrijeme reagiranja bili bi jednaki:

$$t_R = 0,8 \text{ s}$$

$$s_R = 36 \text{ m}$$

Put i vrijeme kočenja bili bi znatno veći zbog manjeg maksimalnog usporenja:

$$a_{k \max} = \frac{g (\varphi + f)}{\delta'} = \frac{9,81(0,53 + 0,014)}{1} = 5,34 \text{ m/s}^2$$

$$t_k = \frac{v_0}{a_{k \max}} = \frac{\frac{162}{3,6}}{5,34} = 8,43 \text{ s}$$

$$s_k = \frac{v_0^2}{2 a_{k \max}} = \frac{\left(\frac{162}{3,6}\right)^2}{2 \cdot 5,34} = 189,6 \text{ m}$$

Dakle, ukupno vrijeme i put zaustavljanja su:

$$t_{uk} = t_R + t_k = 0,8 + 8,43 = 9,23 \text{ s}$$

$$s_{uk} = s_R + s_k = 36 + 189,6 = 225,6 \text{ m}$$

II. DIO

VUČNI PRORAČUN CESTOVNOG VOZILA: upute za izradu seminarskog rada

VELEUČILIŠTE U ŠIBENIKU

Promet

**VUČNI PRORAČUN
CESTOVNOG VOZILA**

Student: _____

JMBAG: _____

Mentor: _____

Šibenik, 20xx.

Uvodne napomene

NAPOMENA: Upute za izradu vučnog proračuna vozila rađene su s namjerom da služe i kao podloge za pisanje seminarskog rada, te da obuhvate veći broj različitih slučajeva s kojima se studenti mogu susresti prilikom izrade proračuna. Studenti moraju sami procijeniti koji dijelovi proračuna su im potrebni s obzirom na dobiveni zadatak. Dijelove koji se ne odnose na vozilo za koje se radi vučni proračun potrebno je izbrisati.

Ogledni primjer je transmisija vozila. U uputama za izradu proračuna se nalaze sheme i izrazi za proračunavanje iskoristivosti transmisije za tri moguća slučaja (prednji pogon, stražnji pogon i pogon na sva četiri kotača). Studenti trebaju zadržati slike i koristiti samo one izraze koje se odnose na vozilo za koje se radi proračun, a ostalo izbrisati.

U uputama se nalaze razne napomene, kako za različite moguće slučajeve proračuna vozila, tako za studente koji žele znati više. Takve napomene su označene s „NAPOMENA“ prije teksta odnosno matematičkih izraza. Takve napomene je također potrebno izbrisati prije predaje seminarskog rada. Baš kao i ove uvodne napomene koje upravo čitate.

1. KARAKTERISTIKE VOZILA I PUTA

1.1. Karakteristike vozila

Vučni proračun se radi za hipotetsko vozilo. Veći dio parametara vozila i motora usvojeni su prema vozilu Dacia Duster 1.5 Blue dCi s Diesel motorom snage 85kW. Hipotetsko vozilo ima sljedeće karakteristike:

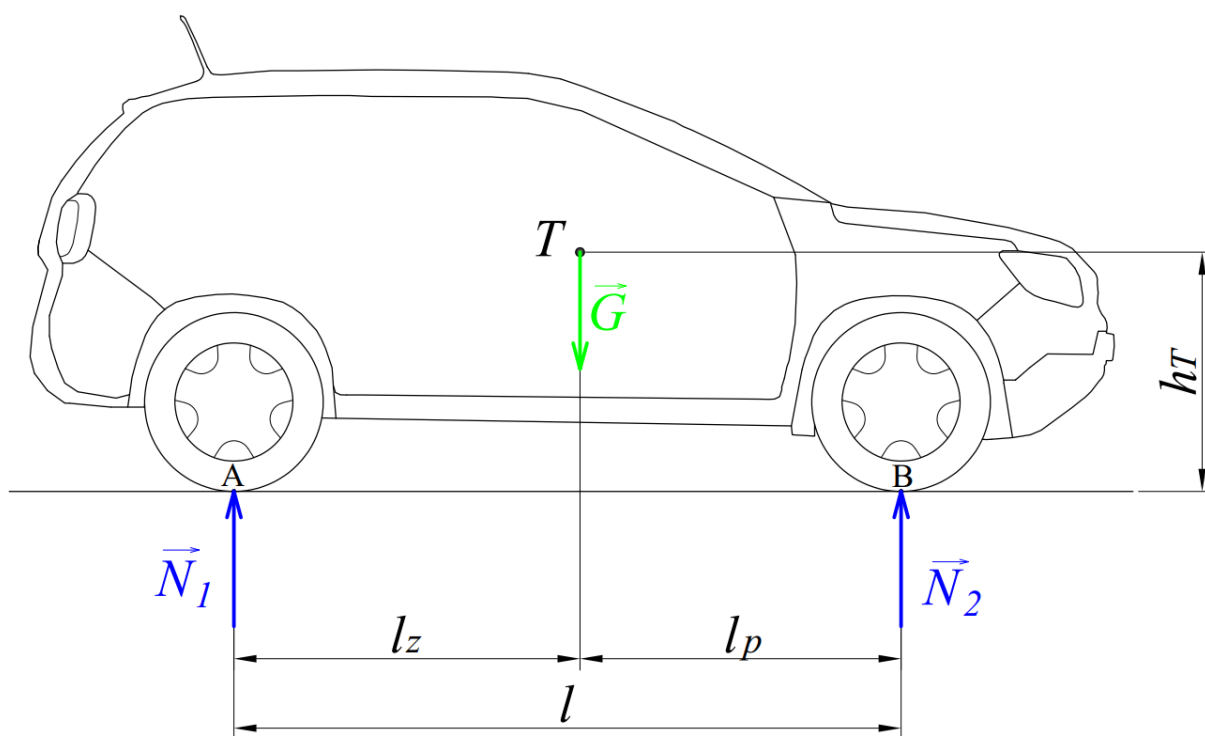
Težina vozila: $G = 14\,200\text{ N}$

Čelna površina vozila: $A = 2,45\text{ m}^2$

Faktor otpora zraka: $C_x = 0,39$

Dinamički radijus kotača: $r_d = 0,33\text{ m}$

Položaj težišta: $l_1 = 1,0\text{ m}$, $l_2 = 1,67\text{ m}$, $h_T = 0,65\text{ m}$

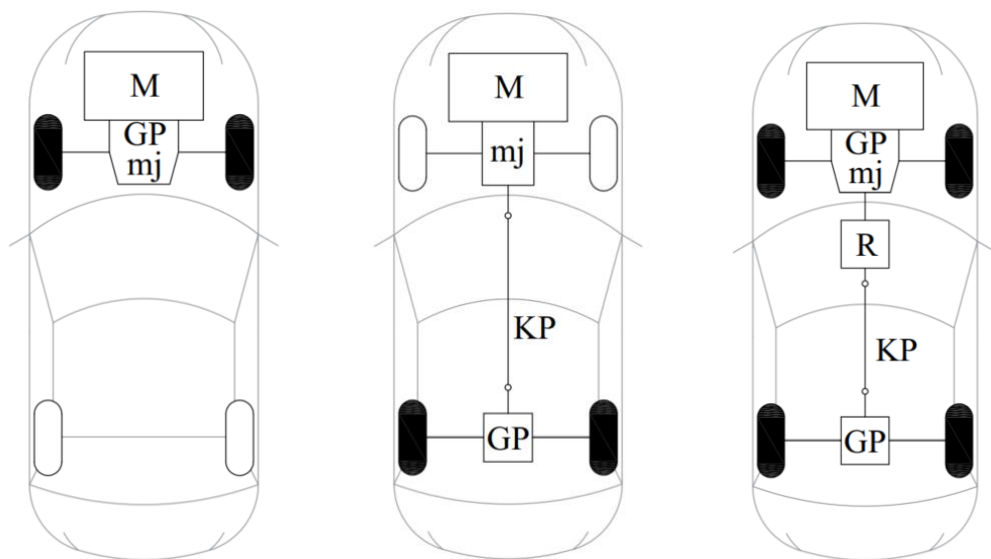


Slika 1.1. Karakteristike vozila

NAPOMENA: Studenti koji žele izraditi vučni proračun na temelju stvarnog vozila, podatke o vozilu mogu potražiti na web stranicama i u katalozima proizvođača vozila, te na internet stranicama poput www.car.info, www.auto-data.net, www.automobile-catalog.com. Upute za određivanje dinamičkog radijusa kotača na temelju oznake pneumatika, te upute za očitavanje vanjske brzinske karakteristike mogu se pronaći u literaturi [7] Stojić, B.: Uputstvo za izradu vučnog proračuna, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, 2009.

1.2. Transmisija

Hipotetsko vozilo ima pogon na prednje kotače. Shema transmisije³ je prikazana na slici 1.2. Usvaja se stupanj iskoristivosti transmisije $\eta_{tr} = 0,88$. U ovom proračunu se pretpostavlja jednak stupanj iskoristivosti transmisije u svim stupnjevima prijenosa u mjenjaču.



Slika 1.2. Shema transmisije

NAPOMENA: Za vozila koja imaju razvodnik i pogon tipa 4X4 te hidrauličku transmisiju treba usvajati manji stupanj iskoristivosti transmisije (ako stupanj iskoristivosti nije unaprijed poznat!), ili stupanj iskoristivosti transmisije izračunati preko izraza:

Pogon na prednje kotače: $\eta_{uk} = \eta_{mj} \cdot \eta_{GP}$

Pogon na stražnje kotače: $\eta_{uk} = \eta_{mj} \cdot \eta_{KP} \cdot \eta_{GP}$

Pogon na sve kotače: $\eta_{uk} = \eta_{mj} \cdot \eta_{GP}^2 \cdot \eta_{KP} \cdot \eta_R$

S tim da su okvirne vrijednosti stupnja iskoristivosti za pojedine komponente transmisije:

mjenjač	0,94 – 0,98
kardanski prijenos	0,98 – 1,00
glavni prijenosnik	0,94 – 0,98
razvodnik snage	0,96 – 0,98

³ Ostaviti samo onu sliku transmisije koja odgovara vrsti pogona vozila za koje se vrši proračun.

Glavni prijenosnik vozila ima prijenosni omjer:

$$i_{GP} = 4,80$$

Mjenjač je mehanički i ima 6 stupnjeva prijenosa i sljedeće prijenosne omjere:

$$i_{mjI} = 4,45$$

$$i_{mjII} = 2,59$$

$$i_{mjIII} = 1,63$$

$$i_{mjIV} = 1,11$$

$$i_{mjV} = 0,81$$

$$i_{mjVI} = 0,64$$

NAPOMENA: Za vozila s pogonom na sva četiri kotača dodati prijenosni omjer razvodnika.

1.3. Vanjska brzinska karakteristika motora

Podaci iz dijagrama vanjske brzinske karakteristike dobiveni su pri punoj dobavi goriva kada je papučica gasa je pritisnuta do kraja, odnosno pri maksimalnom opterećenju motora. Manjim pritiskom na papučicu gasa, motor može proizvesti bilo koju manju vrijednost momenta, odnosno snage od navedenih.

Vučni proračun se izvodi pri radu motora na vanjskoj brzinskoj karakteristici. Vozilo je pogonjeno s Diesel motorom maksimalne snage od 85 kW na 3750 o/min. Maksimalni okretni moment motora je 260 Nm pri 2000 o/min.

Snaga na pojedinim brojevima okretaja je očitana s dijagrama iz kataloga proizvođača. Okretni moment motora Me u Nm izračunat je izrazom:

$$Me = \frac{Pe}{\omega_m} = \frac{Pe}{\frac{2\pi \cdot n}{60}} = \frac{30 \cdot Pe}{\pi \cdot n}$$

gdje je:

Pe - snaga motora [W]

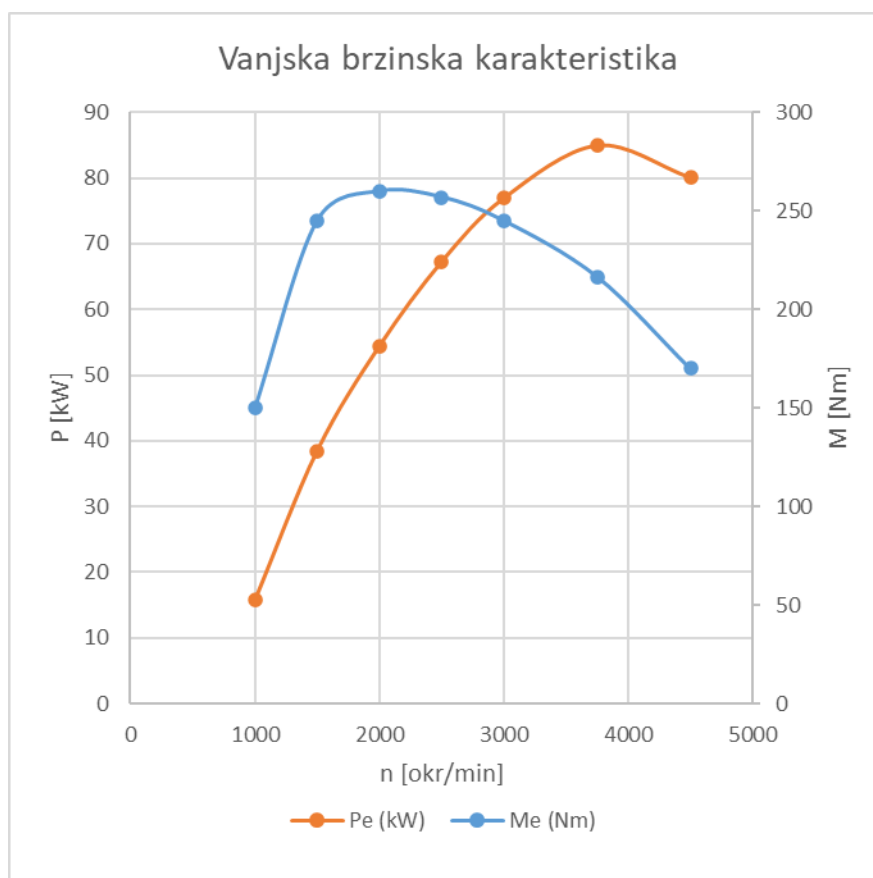
ω_m – kutna brzina motora [rad/s]

n - broj okretaja [o/min]

Vanjska brzinska karakteristika prikazana je u tabličnom obliku u tablici 1.1. i dijagramom na slici 1.3.

Tablica 1.1.

n (o/min)	Me (Nm)	Pe (kW)
1000	150	15,7
1500	245	38,5
2000	260	54,5
2500	257	67,3
3000	245	77,0
3750	216	85,0
4500	170	80,0



Slika 1.3. Vanjska brzinska karakteristika motora

Elastično područje rada motora se nalazi između točke broja okretaja motora u kojoj se ostvaruje najveći moment i točke broja okretaja motora u kojoj se ostvaruje najveća snaga. Veća elastičnost motora povećava se područje stabilnog rada motora, što čini lakšim savladavanje otpora kretanja i ugodniju vožnju bez česte promjenu stupnja prijenosa.

Elastičnost motora po momentu je jednaka:

$$e_M = \frac{Me_{max}}{Me_{pmax}} = \frac{260}{216} = 1,20$$

Elastičnost motora po broju okretaja je jednaka:

$$e_n = \frac{n_{pmax}}{n_{Mmax}} = \frac{3750}{2000} = 1,88$$

Ukupna elastičnost motora je jednaka:

$$E = e_M e_n = 1,20 \cdot 1,88 = 2,25$$

Gdje je:

e_M – elastičnost motora po okretnom momentu

Me_{max} – maksimalni okretni moment motora [Nm]

Me_{pmax} – okretni moment motora pri maksimalnoj snazi [Nm]

e_n – elastičnost motora po broju okretaja

n_{pmax} – broj okretaja pri maksimalnoj snazi motora [okr/s]

n_{Mmax} – broj okretaja pri maksimalnom momentu motora [okr/s]

E – ukupna elastičnost motora

1.4. Karakteristike puta

Vučne karakteristike vozila računaju se za asfaltnu podlogu sa sljedećim usvojenim vrijednostima:

- faktor otpora kotrljanja pri malim brzinama: $f_0 = 0,02$
- ovisnost faktora otpora kotrljanja o brzini: $f = f_0 + C_1 \cdot v + C_2 \cdot v^4$
- faktor prijanjanja/adhezije, za suhi asfalt u dobrom stanju: $\varphi = 0,8$.

Vučne karakteristike se računaju za uspone puta od $u = 0\%$, 3% , 6% , 9% , 12% i 15% .

NAPOMENA: vučni proračun može se raditi za različite karakteristike puta. Okvirne vrijednosti faktora prijanjanja za različita stanja kolnika mogu se pronaći u tablici:

Tablica 1.2. [1]

Vrsta podloge	Faktor prrianjanja φ	Vrsta podloge	Faktor prrianjanja φ
Hrapavi asfalt	0,8	Beton	0,7
Glatki asfalt	0,7	Mokri beton	0,6
Mokri hrapavi asfalt	0,7	Pijesak	0,3 – 0,4
Mokri glatki asfalt	0,5	Snijeg	0,1 – 0,2
Makadam	0,6	Poledica	0,05 – 0,1

2. OTPORI KRETANJA

Sile otpora kretanja kotrljanja i zraka računaju se pri konstantnoj brzini kretanja vozila za brzine od 0 km/h do brzine 200 km/h, za niz vrijednosti brzina koje su višekratnik broja 20, npr. 0, 20, 40, 60, ... 200 km/h. Sile otpora uspona računaju se za različite uspone podloge, od horizontalne podloge do uspona 15% - 20% jer to su najčešći usponi koji se mogu susresti na klasičnim cestama.

NAPOMENA: sile otpora računaju se i za veće brzine ako je maksimalna brzina kretanja vozila veća od 200 km/h. U tom slučaju, krajnja brzina za koju se računaju sile otpora treba biti veća od maksimalne brzine kretanja vozila, npr. ako je maksimalna brzina kretanja vozila 225 km/h, otpori se računaju do brzine 240 km/h. Također, ako se radi o terenskom vozilu ili nekom vozilu koje može savladati velike uspone, sile otpora uspona mogu se računati prema drugačijoj raspodjeli.

2.1. Otpori kotrljanja

Faktor otpora kotrljanja se povećava s brzinom prema formuli:

$$f = f_0 + C_1 \cdot v + C_2 \cdot v^4$$

gdje je:

v - brzina [km/h]

Prema [7] usvajaju se sljedeće vrijednosti za faktore C_1 i C_2 :

$$C_1 = 5,42 \cdot 10^{-6}$$

$$C_2 = 1,05 \cdot 10^{-11}$$

NAPOMENA: Moguće je koristiti i formulu [1] :

$$f = f_0(1 + C \cdot v^2)$$

gdje je:

$$C = (4 \dots 5) \cdot 10^{-5}$$

Sile otpora kotrljanja F_k u N je jednaka:

$$F_k = G \cdot \cos \alpha \cdot f$$

gdje je:

G - težina vozila [N]

α - kut uspona puta [°]

Snaga P_k u W potrebna za savladavanje otpora kotrljanja jednaka je:

$$P_k = F_k \cdot v = konst.$$

gdje je:

F_k - otpor kotrljanja [N]

v - brzina vozila [m/s]

Uspón puta je zadan u postotcima pa se kut uspona α računa prema:

$$\alpha = \arctg \frac{u}{100}$$

gdje je:

u - uspon puta [%]

α –kut uspona [°]

NAPOMENA: U programu Excel se *arkus tangensa* kuta izračunava naredbom ATAN, a vrijednost kuta se dobiva u radijanima. Za pretvaranje kuta iz radijana u stupnjeve koristi se formula:

$$\alpha(stupnjevi) = \alpha(radijani) \frac{180}{\pi}$$

2.2. Otpori zraka

Sila otpora zraka F_z u N računa se prema:

$$F_z = \frac{1}{2} \rho_z \cdot v^2 \cdot c_x \cdot A$$

gdje je:

ρ_z – gustoća zraka [kg/m³] i za standardne uvjete $\rho_z = 1,2$ kg/m³

C_x – faktor otpora zraka koji je usvojen i iznosi $C_x = 0,39$

A – čelna površina [m²] koja je zadana i iznosi $A = 2,45$ m²

Snaga P_z u W potrebna za savladavanje otpora zraka:

$$P_z = F_z \cdot v$$

gdje je:

v - brzina vozila [m/s]

2.3. Otpori uspona

Sila otpora za savladavanje uspona F_u u N je jednaka:

$$F_u = G \cdot \sin \alpha$$

Snaga P_u u W potrebna za savladavanje otpora zbog uspona:

$$P_u = F_u \cdot v$$

gdje je:

G - težina vozila [N]

v - brzina vozila [m/s]

2.4. Ukupni otpori kretanja

Ukupna sila otpora kretanja F u N jednaka je:

$$F = F_k + F_u + F_z$$

Potrebna snaga P u W za savladavanje otpora jednaka je:

$$P = F \cdot v$$

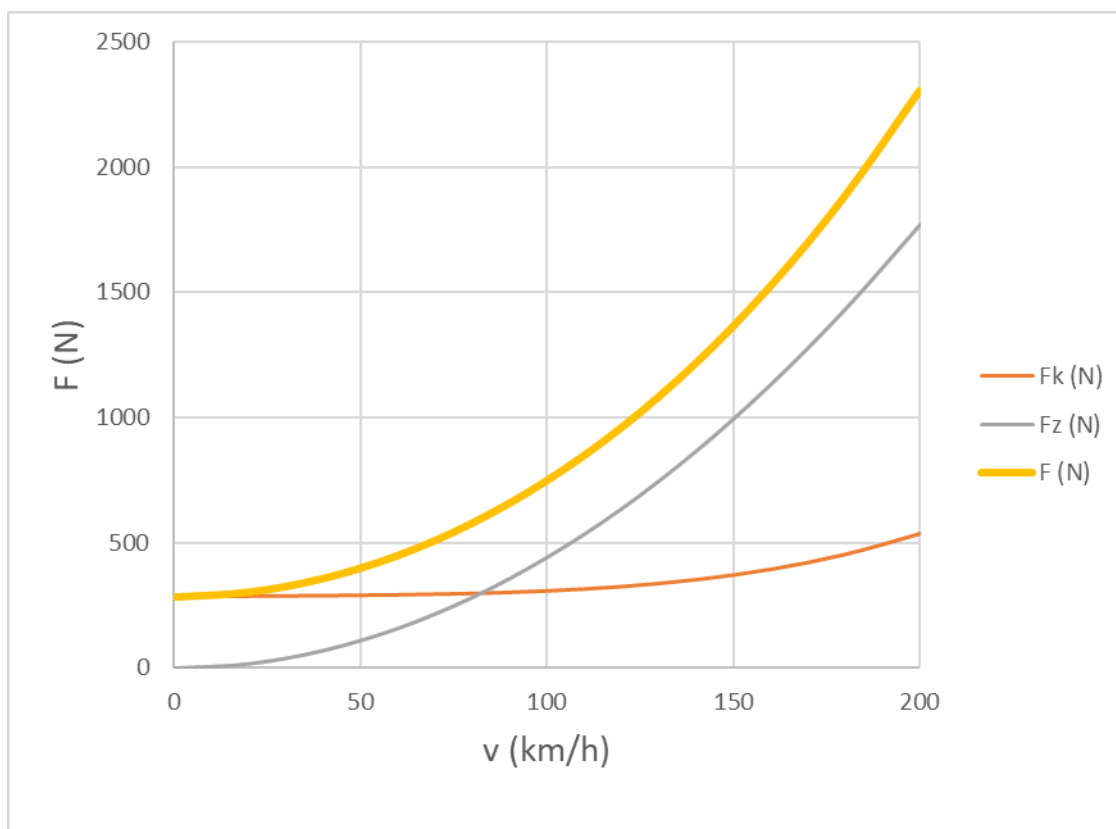
gdje je:

v - brzina vozila [m/s]

Otpori kretanja na horizontalnoj podlozi (tj. pri $u = 0\%$, odnosno pri $\alpha = 0^\circ$) i faktor otpora kotrljanja računati su za brzine kretanja od 0 do 200 km/h i prikazani su u tablici 2.1 i dijagramom na slici 2.1.

Tablica 2.1.

v (km/h)	f	F_k (N)	F_z (N)	F (N)
0	0,0200	284,0	0,0	284,0
20	0,0201	285,6	17,7	303,2
40	0,0202	287,5	70,7	358,2
60	0,0205	290,6	159,1	449,7
80	0,0209	296,3	282,9	579,1
100	0,0216	306,6	442,0	748,6
120	0,0228	324,2	636,5	960,6
140	0,0248	352,1	866,3	1218,4
160	0,0277	394,0	1131,5	1525,5
180	0,0320	454,4	1432,1	1886,5
200	0,0379	538,0	1768,0	2306,0

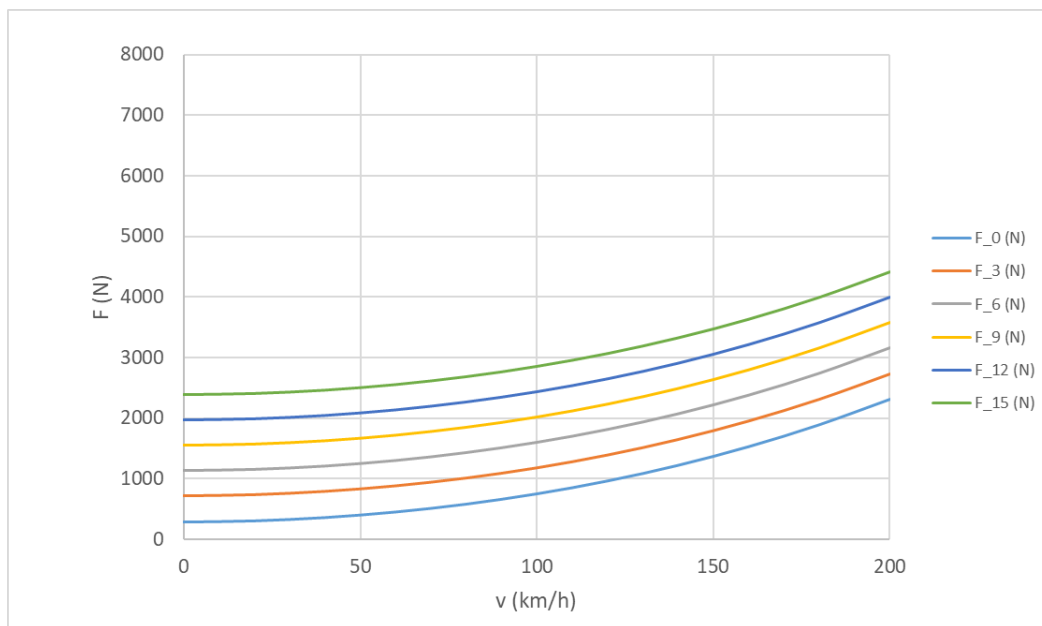


Slika 2.1. Otpori kretanja na horizontalnoj podlozi

U tablici 2.2 i na slici 2.2 prikazani su rezultati proračuna ukupnih otpora kretanja za horizontalnu podlogu i na usponima od 3%, 6%, ..., 15%.

Tablica 2.2.

	Uspon					
u (%)=	0	3	6	9	12	15
α (°)=	0	1,7	3,4	5,1	6,8	8,5
v (km/h)	F_0 (N)	F_3 (N)	F_6 (N)	F_9 (N)	F_{12} (N)	F_{15} (N)
0	284,0	709,7	1134,0	1555,7	1973,8	2387,3
20	303,2	728,9	1153,2	1574,9	1993,1	2406,5
40	358,2	783,9	1208,1	1629,9	2048,0	2461,4
60	449,7	875,3	1299,6	1721,4	2139,5	2552,9
80	579,1	1004,8	1429,1	1850,8	2268,9	2682,3
100	748,6	1174,3	1598,5	2020,2	2438,3	2851,6
120	960,6	1386,3	1810,5	2232,2	2650,2	3063,5
140	1218,4	1644,0	2068,2	2489,8	2907,7	3320,9
160	1525,5	1951,2	2375,3	2796,8	3214,6	3627,6
180	1886,5	2312,1	2736,1	3157,5	3575,1	3987,9
200	2306,0	2731,5	3155,5	3576,6	3994,0	4406,4

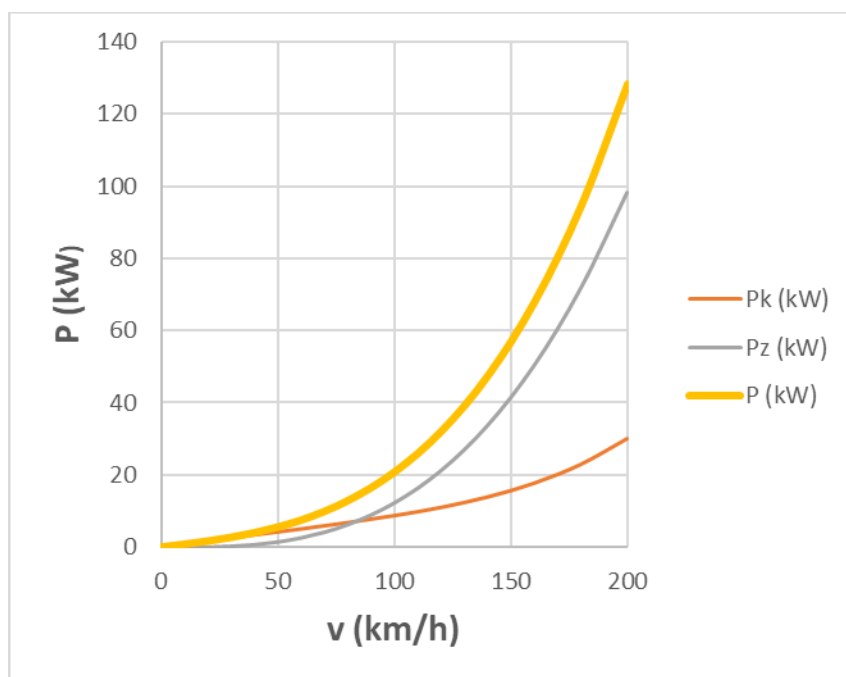


Slika 2.2. Ukupni otpori kretanja na horizontalnoj podlozi i na usponima

Snage potrebne za savladavanje otpora na horizontalnoj podlozi su prikazane u tablici 2.3. i na slici 2.3.

Tablica 2.3.

v (km/h)	P_k (kW)	P_z (kW)	P (kW)
0	0,0	0,0	0,0
20	1,6	0,1	1,7
40	3,2	0,8	4,0
60	4,8	2,7	7,5
80	6,6	6,3	12,9
100	8,5	12,3	20,8
120	10,8	21,2	32,0
140	13,7	33,7	47,4
160	17,5	50,3	67,8
180	22,7	71,6	94,3
200	29,9	98,2	128,1

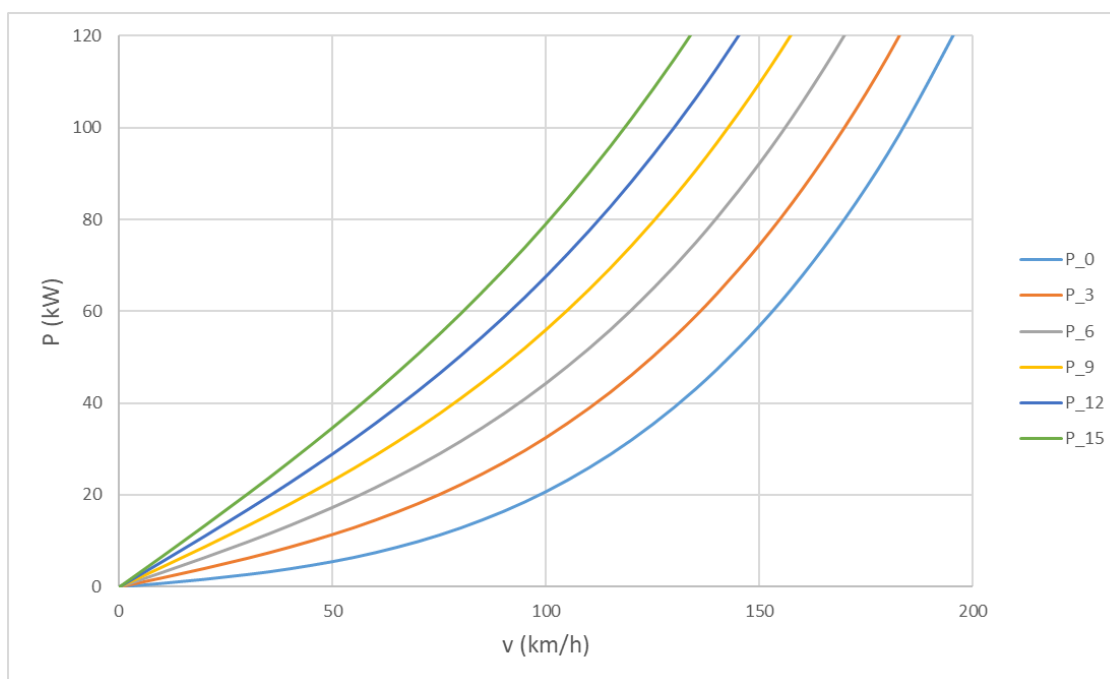


Slika 2.3. Potrebna snaga za savladavanje otpora na horizontalnoj podlozi

U tablici 2.4 i na slici 2.4 prikazani su rezultati proračuna ukupne snage otpora kretanja za horizontalnu podlogu i na usponima.

Tablica 2.4.

u (%)=	0	3	6	9	12	15
α (°)=	0	1,7	3,4	5,1	6,8	8,5
v (km/h)	P_0	P_3	P_6	P_9	P_12	P_15
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
20	1,68	4,05	6,41	8,75	11,07	13,37
40	3,98	8,71	13,42	18,11	22,76	27,35
60	7,49	14,59	21,66	28,69	35,66	42,55
80	12,87	22,33	31,76	41,13	50,42	59,61
100	20,79	32,62	44,40	56,12	67,73	79,21
120	32,02	46,21	60,35	74,41	88,34	102,12
140	47,38	63,93	80,43	96,83	113,08	129,15
160	67,80	86,72	105,57	124,30	142,87	161,23
180	94,32	115,60	136,81	157,87	178,75	199,39
200	128,11	151,75	175,30	198,70	221,89	244,80



Slika 2.4. Potrebna snaga za savladavanje otpora na horizontalnoj podlozi i usponima

3. VUČNE SILE I SNAGE

3.1. Vučne sile

Vučne sile na pogonskim kotačima računaju se za svaki stupanj prijenosa u mjenjaču. Ukupni prijenosni omjer transmisije je jednak:

$$i_{tr} = i_{MJ} \cdot i_{GP}$$

gdje je:

i_{MJ} – prijenosni omjer u mjenjaču u određenom stupnju prijenosa

i_D – prijenosni odnos glavnog prijenosnika

Ako vozilo ima razvodnik tada je ukupni prijenosni omjer jednak:

$$i_{tr} = i_{MJ} \cdot i_{GP} \cdot i_R$$

gdje je:

i_R – prijenosni omjer u razvodniku.

NAPOMENA: Ako je vozilo opremljeno s razvodnikom tada obično razvodnik ima dva prijenosna omjera. Jedan tzv. direktni prijenos koji je stalno uključen i jedan s redukcijom koja se uključuje po potrebi, tj. s prijenosnim omjerom $i_R > 1$. Kod vozila s razvodnikom vučne sile se računaju posebno za svaki prijenosni omjer u razvodniku i mjenjaču.

Motorna vučna sila F_m u N na pogonskim kotačima je jednaka obodnoj sili koja potječe od momenta motora te je jednaka:

$$F_m = \frac{M_e \cdot i_{tr} \cdot \eta_{tr}}{r_d}$$

gdje je:

M_e - okretni moment motora [Nm]. Okretni moment motora na vanjskoj brzinskoj karakteristici se mijenja u ovisnosti od broja okretaja, tj. vrijedi da je $M_e = f(n_m)$ i ta ovisnost je zadana s podacima u tablici 1.1.

i_{tr} - prijenosni omjer transmisije u određenom stupnju prijenosa

η_{tr} - stupanj iskoristivosti transmisije

r_d - dinamički radijus kotača [m] je zadan i iznosi $r_d=0,31$ m.

NAPOMENA: Ponekad je umjesto dinamičkog radijusa zadan tzv. opseg kotrljanja, tj. prijeđeni put pneumatika O u jednom okretaju. Tada je dinamički radijus jednak:

$$r_d = \frac{O}{2\pi}$$

Motorna vučna sila se prikazuje za određenu brzinu vozila koja ovisi od broja okretaja motora i stupnja prijenosa u mjenjaču. Brzina vozila v u km/h je jednaka:

$$v = \omega_K r_D = \frac{2\pi n \cdot r_d}{i_{uk}} = 3,6 \cdot \frac{2\pi}{60} \cdot \frac{n \cdot r_d}{i_{MJ} \cdot i_{GP} \cdot i_R}$$

$$v = 0,377 \cdot \frac{r_d \cdot n}{i_{MJ} \cdot i_{GP} \cdot i_R}$$

gdje je:

n - broj okretaja motora [o/min]

i_{MJ}, i_{GP}, i_R - prijenosni odnosi u mjenjaču u određenom stupnju prijenosa i u glavnom prijenosniku i razvodniku

Idealni mjenjač davao bi pri maksimalnoj snazi motora obodnu silu na pogonskim kotačima koja bi bila jednaka:

$$P_{e\max} \cdot \eta_{tr} = F_m \cdot v$$

Krivulja koja prikazuje takvu raspodjelu vučne sile naziva se idealna hiperbola vuče. U tablici 3.1. su izračunati iznosi vučnih sila za idealnu hiperbolu vuče.

Tablica 3.1.

v (km/h)	Fv (N)
20	13464
40	6732
60	4488
80	3366
100	2693
120	2244
140	1923
160	1683
180	1496
200	1346

Ako se u gornju formulu Pe_{max} uvrsti u kW, brzine vozila v u km/h, tada je motorna vučna sila F_m u N jednaka:

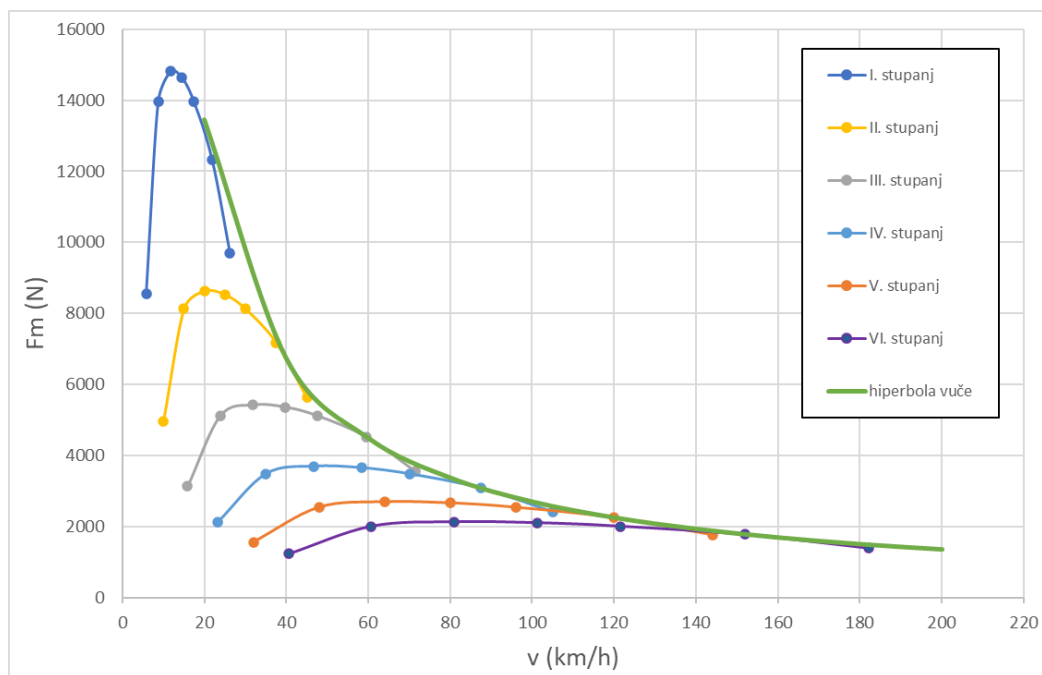
$$F_m = 3,6 \frac{Pe_{max} \cdot \eta_{tr}}{v}$$

U tablici 3.2. su prikazani rezultat proračuna motornih vučnih sila u funkciji od brzine vozila pri određenim stupnjevima prijenosa u mjenjaču.

Na slici 3.1. je dijagram vučnih sila pri različitim stupnjevima prijenosa u mjenjaču te hiperbola koja predstavlja vučnu silu idealnoga mjenjača pri radu motora na maksimalnoj snazi.

Tablica 3.2.

n(o/min)	Mm(Nm)	Pe(kW)	v (km/h)	Fm (N)	v (km/h)	Fm (N)	v (km/h)	Fm (N)	v (km/h)	Fm (N)	v (km/h)	Fm (N)	v (km/h)	Fm (N)
			I. stupanj		II. stupanj		III. stupanj		IV. stupanj		V. stupanj		VI. stupanj	
1000	150	16	5,8	8544	10,0	4973	15,9	3130	23,4	2131	32,0	1555	40,5	1229
1500	245	38	8,7	13955	15,0	8122	23,9	5112	35,0	3481	48,0	2540	60,7	2007
2000	260	54	11,6	14810	20,0	8620	31,8	5425	46,7	3694	64,0	2696	81,0	2130
2500	257	67	14,6	14639	25,0	8520	39,8	5362	58,4	3651	80,0	2665	101,2	2105
3000	245	77	17,5	13955	30,0	8122	47,7	5112	70,1	3481	96,0	2540	121,5	2007
3750	217	85	21,8	12335	37,5	7179	59,6	4518	87,6	3077	120,0	2245	151,9	1774
4500	170	80	26,2	9683	45,0	5636	71,6	3547	105,1	2415	144,0	1763	182,2	1393



Slika 3.1. Vučne sile i idealna hiperbola vučne sile

3.2. Vučna snaga

Snaga koja se prenosi od motora do pogonskih kotača u pojedinom stupnju prijenosa, tj. snaga koju proizvodi motorna vučna sila na pogonskim kotačima je jednaka:

$$P_m = \eta_{tr} \cdot P_e$$

gdje je:

P_e – snaga motora u W koja se mijenja u ovisnosti od broja okretaja motora na vanjskoj brzinskoj karakteristici, tj. $P_e = f(n)$ i ona je zadana u tablici 1.1.

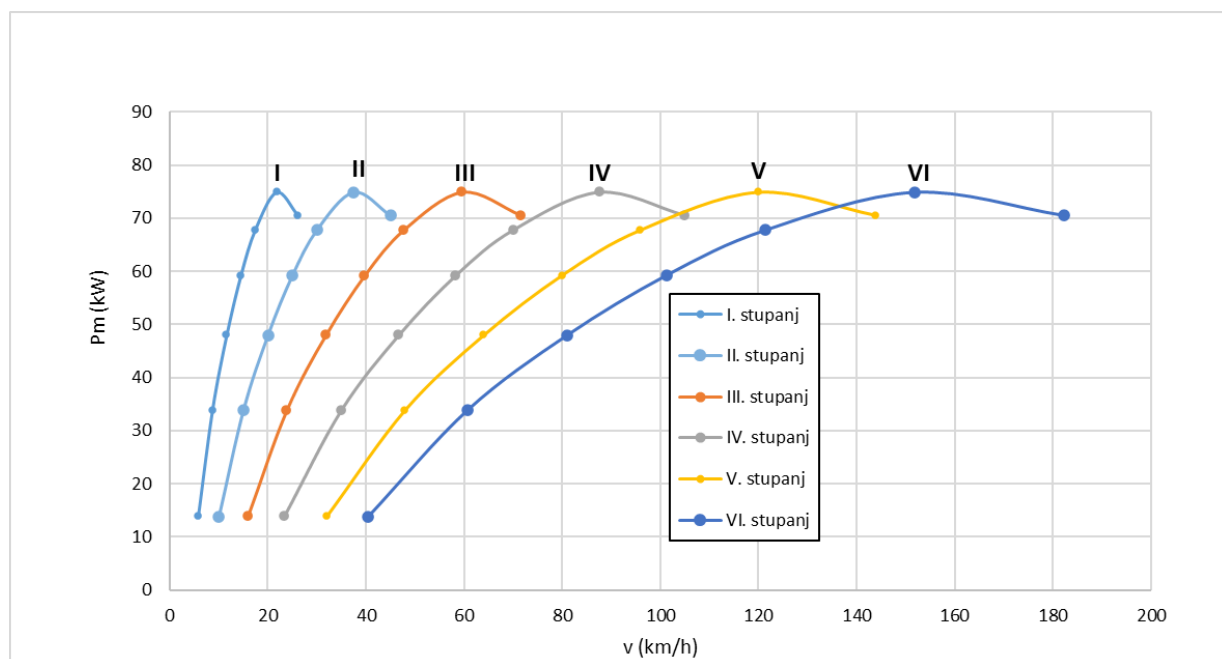
η_{tr} – stupanj iskoristivosti transmisije u određenom stupnju prijenosa. U analiziranom slučaju stupanj iskoristivosti je zadan i jednak u svim stupnjevima prijenosa.

Ako se želi prikazati ovisnost snage vuče P_m u pojedinom stupnju prijenosa u mjenjaču, tada je potrebno za svaki broj okretaja motora n izračunati brzinu vozila v , te prikazati snagu P_m za tu brzinu.

U tablici 3.3. i slici 3.2. je prikazan proračun snage na pogonskim kotačima u ovisnosti od brzine vozila i u različitim stupnjevima prijenosa u mjenjaču.

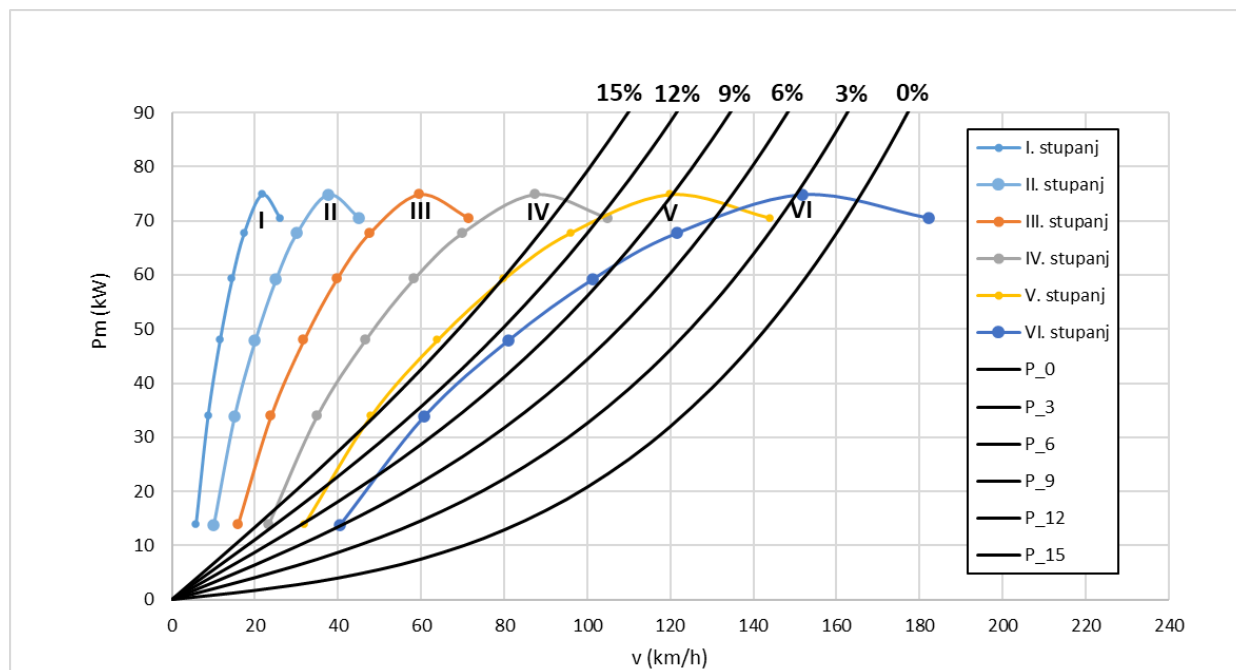
Tablica 3.3.

n(o/min)	Mm(Nm)	Pe(kW)	v (km/h)	Pv (kW)	v (km/h)	Pv (kW)	v (km/h)	Pv (kW)	v (km/h)	Pv (kW)	v (km/h)	Pv (kW)	v (km/h)	Pv (kW)
			I. stupanj		II. stupanj		III. stupanj		IV. stupanj		V. stupanj		VI. stupanj	
1000	150	16	5,8	14	10,0	14	15,9	14	23,4	14	32,0	14	40,5	14
1500	245	38	8,7	34	15,0	34	23,9	34	35,0	34	48,0	34	60,7	34
2000	260	54	11,6	48	20,0	48	31,8	48	46,7	48	64,0	48	81,0	48
2500	257	67	14,6	59	25,0	59	39,8	59	58,4	59	80,0	59	101,2	59
3000	245	77	17,5	68	30,0	68	47,7	68	70,1	68	96,0	68	121,5	68
3750	217	85	21,8	75	37,5	75	59,6	75	87,6	75	120,0	75	151,9	75
4500	170	80	26,2	70	45,0	70	71,6	70	105,1	70	144,0	70	182,2	70



Slika 3.2. Vučne snage

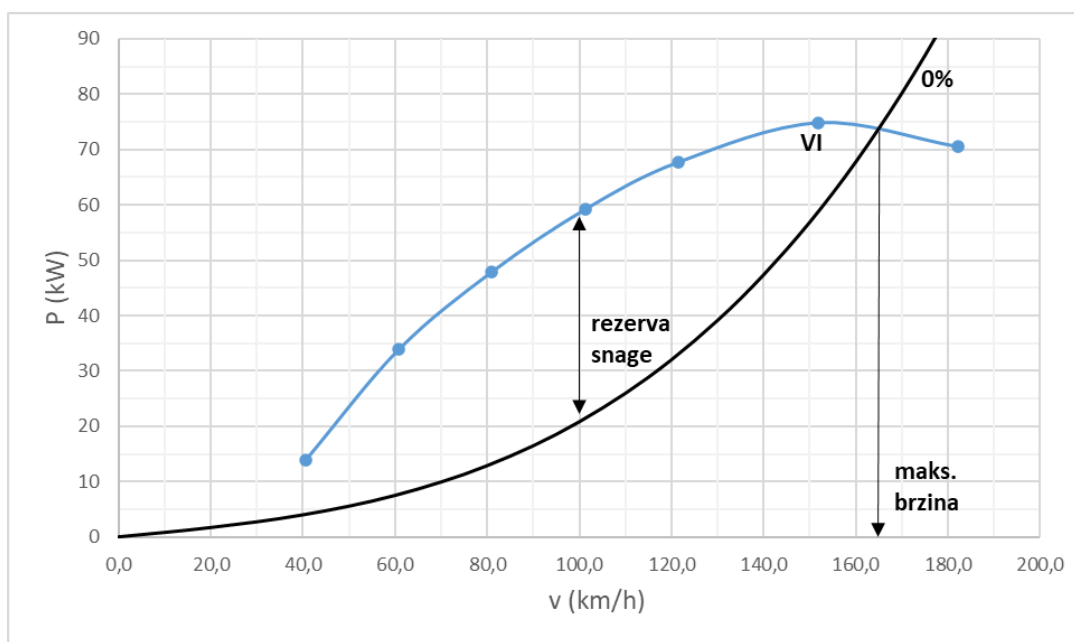
Na dijagramu vučne snage mogu se ucrtati snage otpora kretanja pri pojedinim usponima (slika 3.3.), odnosno može prikazati bilanca snage. Iz ovog dijagrama mogu se očitati najveće moguće brzine vozila u pojedinim stupnjevima prijenosa na određenim usponima.



Slika 3.3. Bilanca snage

Maksimalna brzina na horizontalnoj podlozi ($u = 0\%$) je 165 km/h u VI. stupnju prijenosa. Maksimalna brzina na usponu $u = 3\%$ je 150 km/h u VI. stupnju prijenosa. Maksimalna brzina na usponu $u = 6\%$ je 133 km/h u V. stupnju prijenosa. Maksimalna brzina na usponu $u = 9\%$ je 121 km/h u V. stupnju prijenosa. Maksimalna brzina na usponu $u = 12\%$ je 103 km/h u IV. stupnju prijenosa. Maksimalna brzina na usponu $u = 15\%$ je 95 km/h u IV. stupnju prijenosa.

Na slici 3.4. je prikazana bilanca snage za kretanje vozila u VI. stupnju prijenosa i na ravnoj podlozi. Pri brzini kretanja od 100 km/h prikazana je rezerva snage za ubrzanje, tj. razlika između raspoložive snage motora i potrebne snage za savladavanje otpora pri toj brzini. Rezerva snage iskorištava se za povećanje brzine vozila dok se snaga motora i snaga potrebna za savladavanje otpora ne izjednače tj. dok se ne postigne maksimalna brzina vozila. Maksimalna brzina se grafički određuje očitavanjem brzine na sjecištu dviju krivulja. Pri maksimalnoj brzini vozila snaga na pogonskim kotačima jednaka je snazi otpora kretanja. U konkretnom slučaju maksimalna brzina vozila je 165 km/h.



Slika 3.4. Maksimalna brzina vozila u VI. stupnju prijenosa pri kretanja na horizontalnoj podlozi.

3.3. Sile priranja

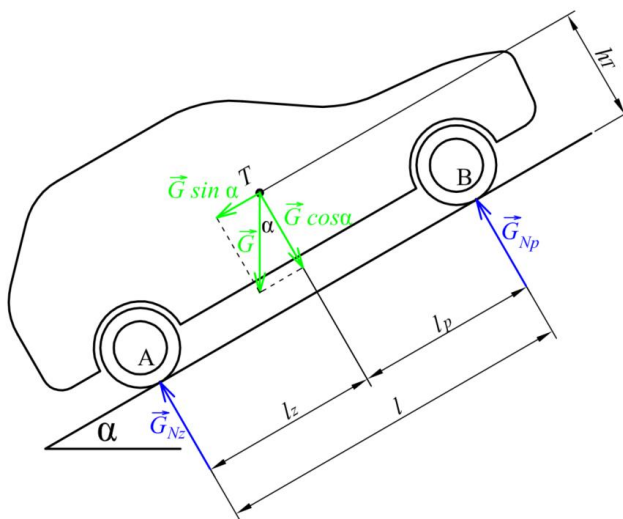
Na slici 3.5 su prikazane sile koje djeluju na vozilo u kontinuiranom kretanju na usponu. Za vozilo koje **stoji zakočeno** na uzbrdici računaju se okomite reakcije tla koje se u tom slučaju nazivaju **statičke reakcije tla**.

Ako je $l_1 = l_p$, $l_2 = l_z$, pri čemu je $l_1 + l_2 = l$, statičke reakcije tla na uzbrdici pri zakočenom vozilu su jednake:

$$G_{Np} = \frac{G \cos \alpha \cdot l_1 - G \sin \alpha \cdot h_T}{l}; \quad G_{Nz} = \frac{G \cos \alpha \cdot l_1 + G \sin \alpha \cdot h_T}{l}$$

odnosno na horizontalnoj podlozi:

$$G_{Np} = G \frac{l_2}{l}; \quad G_{Nz} = G \frac{l_1}{l}$$



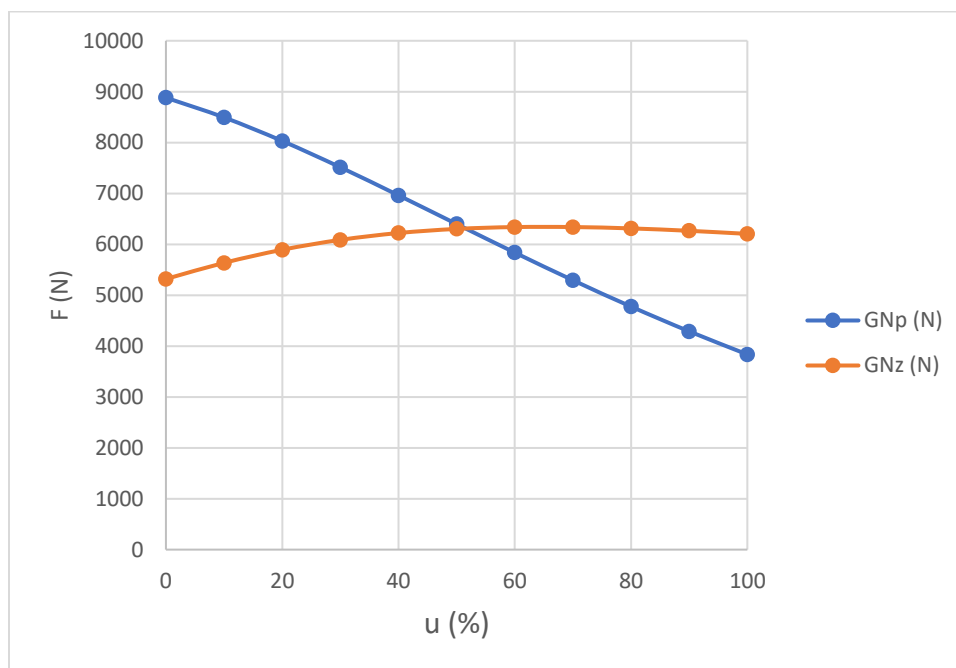
Slika 3.5. Vozilo na usponu

U konkretnom slučaju vertikalne statičke reakcije tla horizontalnoj podlozi su:

$G_{Np} = 8882 \text{ N}$; $G_{Nz} = 5318 \text{ N}$. Promjena statičkih reakcija na uzbrdici prikazane su u tablici 3.3. i na slici 3.6.

Tablica 3.4.

u (%)	α (°)	G_{Np} (N)	G_{Nz} (N)
0	0,0	8882	5318
10	5,7	8494	5636
20	11,3	8031	5893
30	16,7	7514	6087
40	21,8	6963	6222
50	26,6	6398	6303
60	31,0	5837	6339
70	35,0	5294	6339
80	38,7	4776	6312
90	42,0	4289	6266
100	45,0	3836	6205



Slika 3.6. Statičke reakcije tla na uzbrdici

Kod kretanja vozila dolazi do promjene vrijednosti statičkih reakcija tla G_{Np} i G_{Nz} te ih u tom slučaju nazivamo dinamičke reakcije tla. Maksimalna motorna vučna sila koja se može postići, a da ne dođe do proklizavanja na pogonskim kotačima ovisi od vertikalnih reakcija na pogonskim kotačima i od faktora prijanjanja/adhezije φ .

Za razliku od motorne vučne sile F_m (tj. obodne sile na pogonskim kotačima), vučna sila F_{v2} na pogonskim kotačima sa stražnjim pogonom se definira kao, slika 3.5:

$$F_{v2} = F_m - F_{k2}$$

i predstavlja tangencijalnu reakciju tla te je usmjerena u smjeru kretanja vozila.

Maksimalna vrijednost vučne sile koje tlo/put može prihvatiti mora biti manja ili jednaka sili prijanjanja ili adhezivnoj sili:

$$F_{v2} \leq F_\varphi = G_{Nz} \cdot \varphi$$

gdje je:

F_{k2} - sila otpora kotrljanja na stražnjim kotačima

φ - faktor prijanjanja. U proračunu je usvojen $\varphi = 0,8$ što odgovara kretanju po suhom asfaltnom putu

G_{Nz} - dinamička reakcije tla na pogonskim kotačima

Najveća moguća motorna vučna sila, s obzirom na faktor prijanjanja se obično računa kao:

$$F_m \approx F_v = G_{Np} \cdot \varphi \quad 3.1$$

zbog male vrijednosti sile F_{k2} u odnosu na silu F_m !

Kod stražnjeg pogona najveća moguća motorna vučna sila je jednaka:

$$F_m = G_{Nz} \cdot \varphi \quad 3.2$$

a kod pogona na sve kotače:

$$F_m = (G_{Np} + G_{Nz}) \cdot \varphi$$

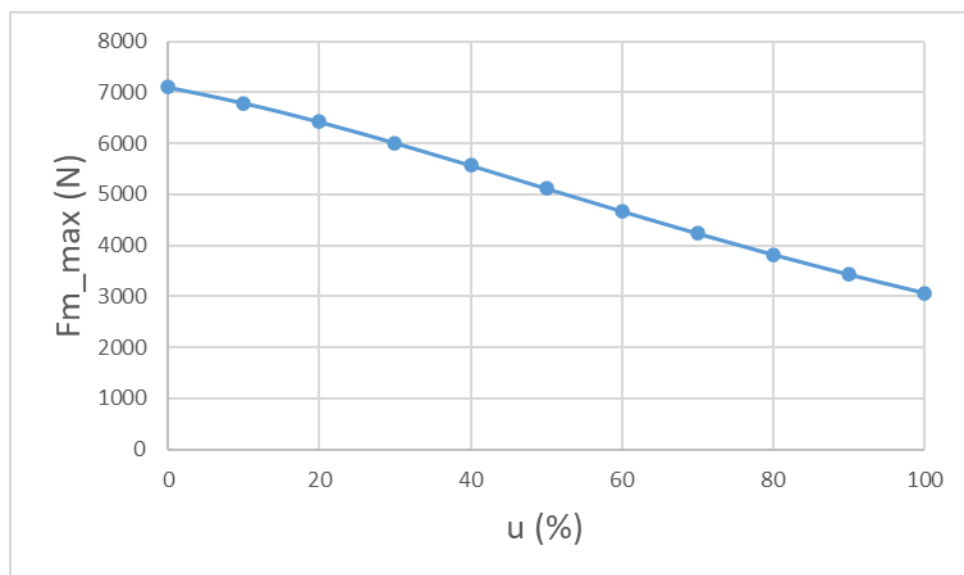
odnosno to je u tom slučaju jednako:

$$F_m = G \cdot \cos\alpha \cdot \varphi \quad 3.3$$

U tablici 3.5. i na slici 3.7. prikazane su vrijednosti maksimalnih motornih vučnih sila koje podnosi tlo bez proklizavanja za usvojeni faktor prijanjanja $\varphi = 0,8$ i s pogonom na prednjim kotačima.

Tablica 3.5

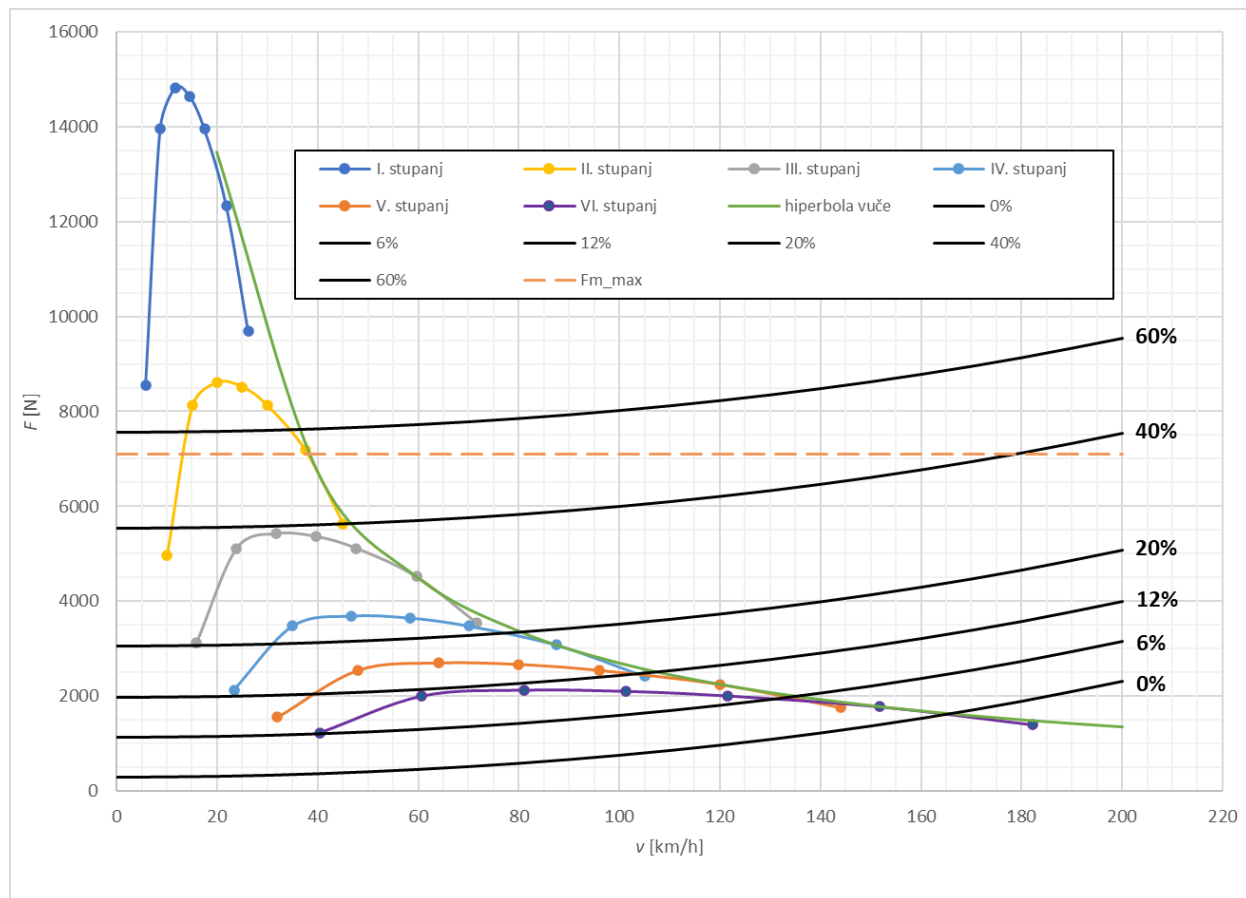
Prednji pogon		
u (%)	α (°)	F_{m_max} (N)
0	0,0	7105
10	5,7	6795
20	11,3	6425
30	16,7	6011
40	21,8	5570
50	26,6	5118
60	31,0	4670
70	35,0	4235
80	38,7	3821
90	42,0	3431
100	45,0	3069



Slika 3.7. Maksimalne motorne vučne sile s obzirom na faktor prijanjanja na različitim usponima

3.4. Vučni dijagram

Na slici 3.8. je prikazan vučni dijagram pomoću temeljem kojeg se mogu analizirati i zaključiti neke sposobnosti vozila.



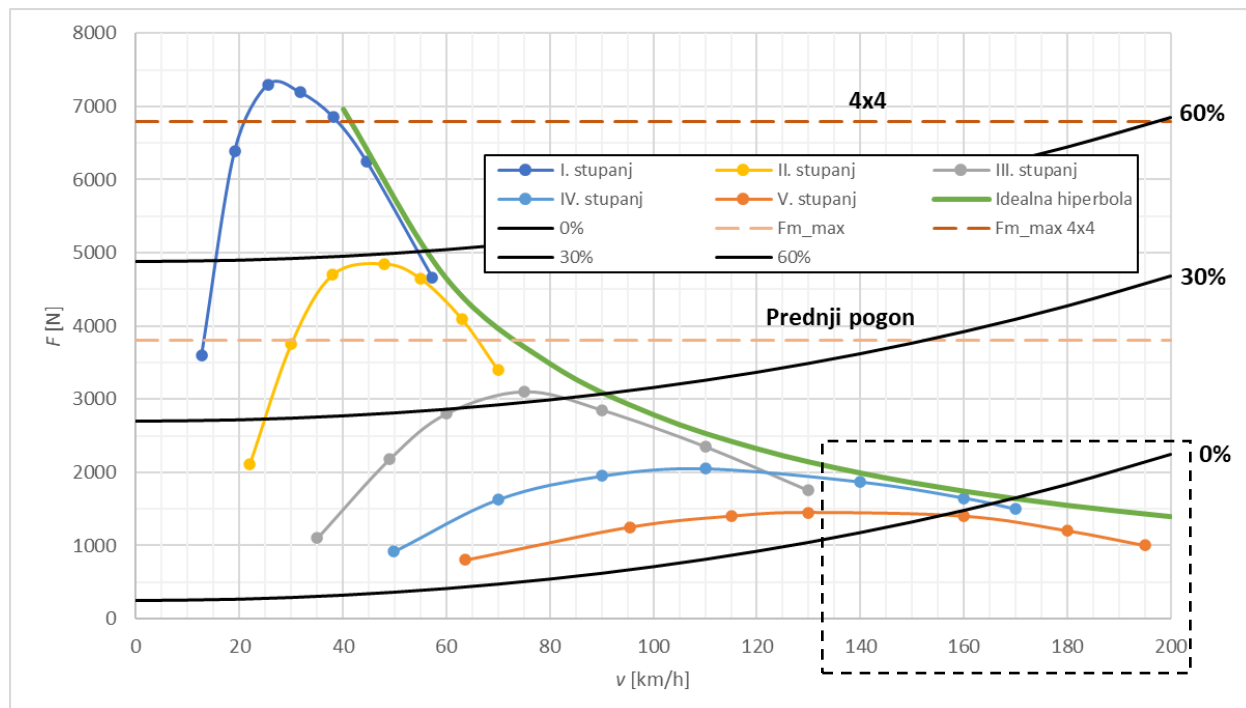
Slika 3.8. Vučni dijagram

Analizom vučnog dijagrama za zadano vozilo može se zaključiti da:

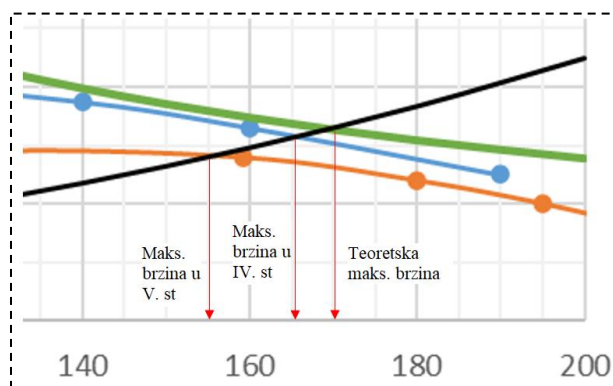
- Vozilo postiže maksimalnu brzinu od 165 km/h u VI. stupnju prijenosa na horizontalnoj podlozi.
- Na usponu 20% vozilo može postići brzinu od 77 km/h u III. stupnju prijenosa, i brzinu od 45 km/h u II. stupnju prijenosa na usponu od 40%.
- Vozilo bi moglo savladati uspon veći od 60% u II. stupnju prijenosa što se tiče raspoložive vučne sile, ali zbog ograničene sile prijanjanja u zadanim uvjetima vučna sila se ne može realizirati, stoga vozilo ne može savladati uspon od 60%.
- Vozilo u I. i II. stupnju prijenosa može ostvariti veću silu nego što se može prenijeti na podlogu. U slučaju boljeg faktora prijanjanja ili pogona na sve kotače veća sila bi se mogla prenijeti na podlogu.

- Prijenosni omjeri mjenjača dobro iskorištavaju kapacitet motora (male razlike između idealne hiperbole i stvarnih vučnih sila) u višim stupnjevima prijenosa.

NAPOMENA: u svrhu boljeg razumijevanje gradiva prikazan je još jedan primjer vučnog dijagrama za neko drugo vozilo. Na temelju ovog vučnog dijagrama mogu donijeti drugačiji zaključci budući da se radi o vozilu s drugačijim karakteristikama. Vozilo ima pogon na prednjim kotačima, ali po potrebi ima mogućnost uključivanja pogona na sve kotače.



Slika 3.9. Dodatni primjer vučnog dijagrama



Slika 3.10. Uvećan detalj na vučnom dijagramu

Analizom vučnog dijagrama za ovo vozilo može se zaključiti da:

- Vozilo ostvaruje teoretsku maksimalnu brzinu od 170 km/h (sjecište idealne hiperbole vuče i sile otpora), no u praksi zbog fizikalnih ograničenja mjenjača vozilo postiže maksimalnu brzinu od 165 km/h i to u IV. stupnju prijenosa.
- U V. stupnju prijenosa vozilo može postići maksimalnu brzinu od 155 km/h. Veća brzina u V. stupnju prijenosa bi se mogla postići na podlozi s manjim otporom kotrljanja ili korištenjem pneumatika s manjim unutrašnjim trenjem.
- Na usponu 30% vozilo bi u teoriji moglo postići brzinu od 90 km/h u III. stupnju prijenosa, ali je zbog fizikalnih ograničenja mjenjača maksimalna brzina je 82 km/h.
- Vozilo može savladati uspon od 60% u prvom stupnju prijenosa, ali samo pod uvjetom da je uključen pogon na sva četiri kotača. Vozilo ne može savladati uspon od 60% u II. stupnju prijenosa.

4. UBRZANJE I DINAMIČKE KARAKTERISTIKE VOZILA

4.1. Određivanje dinamičke karakteristike i ubrzanja vozila

Masa vozila je promjenjiva veličina zbog tereta i putnika koji se u tom trenutku nalaze u vozilu. Zbog toga se za analizu i usporedbu vučnih svojstava različitih vozila koristi se dinamički faktor, tj. odnos motorne vučne sile na kotačima (koji je umanjen za iznos sile otpora zraka) i težine vozila.

Prema definiciji dinamički faktor D je jednak:

$$D = \frac{F_v - F_z}{G},$$

pomoću koje se izračunava ubrzanje vozila a u m/s^2 :

$$a = \frac{D - f}{\delta} g$$

gdje je:

D - dinamička karakteristika izračunata posebno za svaki stupanj prijenosa i za različite brojeve okretaje motora, odnosno za pripadajuće brzine vozila

f - faktor otpora kotrljanja

g - gravitacijska konstanta: $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

δ - faktor utjecaja okretnih masa na inerciju vozila. Prema [7] usvaja se

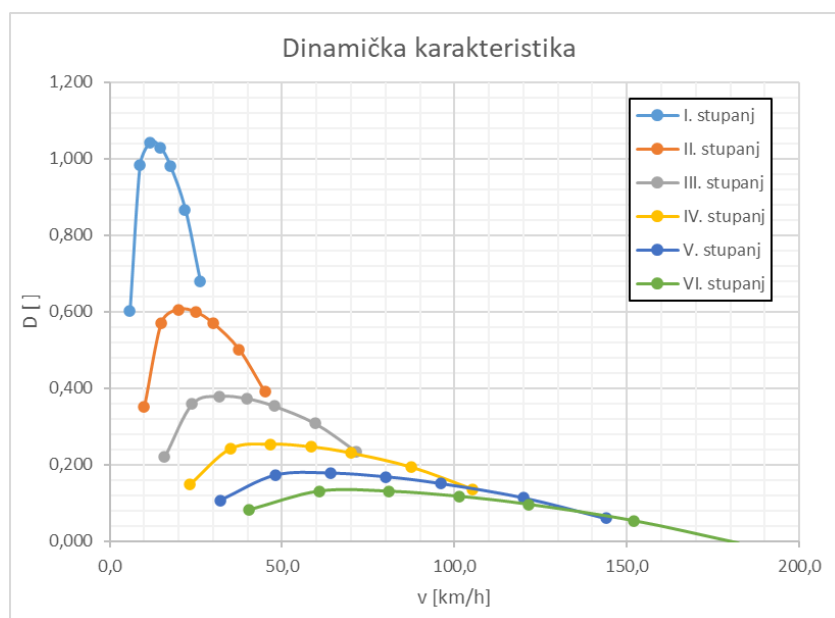
$$\delta = 1,03 + 0,0018 \cdot i_{tr}^2$$

Tablica 4.1

Faktor rotirajućih masa za pojedini st. prijenosa	
$\delta(\text{I}) =$	1,851
$\delta(\text{II}) =$	1,308
$\delta(\text{III}) =$	1,140
$\delta(\text{IV}) =$	1,081
$\delta(\text{V}) =$	1,057
$\delta(\text{VI}) =$	1,047

Tablica 4.2

n (o/min)	v (km/h)	D	a (m/s2)	v (km/h)	D	a (m/s2)
	I. stupanj			II. stupanj		
1000	0,0	0,602	3,08	10,0	0,350	2,47
1500	0,0	0,983	5,10	15,0	0,571	4,13
2000	0,0	1,043	5,42	20,0	0,606	4,39
2500	0,0	1,030	5,35	25,0	0,598	4,33
3000	0,0	0,982	5,10	30,0	0,569	4,12
3750	0,0	0,867	4,49	37,5	0,501	3,61
4500	0,0	0,680	3,50	45,0	0,391	2,78
	III. stupanj			IV. stupanj		
1000	0,0	0,220	1,72	23,4	0,148	1,19
1500	0,0	0,358	2,91	35,0	0,241	2,05
2000	0,0	0,379	3,09	46,7	0,253	2,16
2500	0,0	0,373	3,03	58,4	0,247	2,10
3000	0,0	0,353	2,86	70,1	0,230	1,94
3750	0,0	0,307	2,47	87,6	0,193	1,59
4500	0,0	0,234	1,83	105,1	0,136	1,06
	V. stupanj			VI. stupanj		
1000	0,0	0,106	0,80	40,5	0,081	0,57
1500	0,0	0,172	1,40	60,7	0,130	1,02
2000	0,0	0,177	1,45	81,0	0,130	1,02
2500	0,0	0,168	1,36	101,2	0,116	0,89
3000	0,0	0,150	1,19	121,5	0,095	0,68
3750	0,0	0,113	0,84	151,9	0,053	0,25
4500	0,0	0,060	0,32			



Slika 4.1. Dinamička karakteristika

4.2. Najveći uspon u pojedinom stupnju prijenosa

Maksimalni dinamički faktor u pojedinom stupnju prijenosa može se iščitati iz tablice odnosno dinamičke karakteristike, a odgovara:

$$D_{max} = f_k \cos \alpha + \sin \alpha$$

Kako za male kutove vrijedi: $\cos \alpha \approx 1$, $\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha$, onda maksimalni dinamički faktor odgovara:

$$D_{max} = f_k + \operatorname{tg} \alpha$$

Iz čega se može izračunati maksimalni uspon u pojedinom stupnju prijenosa, koji je približno jednak $u \approx \operatorname{tg} \alpha$

$$D_{max} = f_k + u$$

$$u_{max} = D_{max} - f_k$$

Maksimalni uspon također je ograničen stabilnosti vozila, odnosno hoće li nastupiti prevrtanje oko stražnje osovine ili proklizavanje pogonskih kotača prije nego se postigne maksimalni uspon koji omogućava dinamičnost vozila.

Granični kut α uspona kod kojeg dolazi do prevrtanja vozila oko stražnje osovine može se izračunati iz pojednostavljenog izraza:

$$\operatorname{tg} \alpha_{pr} = \frac{l_z}{h_T}$$

Granični kut α uspona kod kojeg dolazi do proklizavanja pogonskih kotača vozila, ovisno o vrsti pogona može se izračunati iz izraza:

Pogon na prednjim kotačima:

$$\operatorname{tg} \alpha_{kl} = \frac{\varphi l_z - f l}{l + \varphi h_T}$$

Pogon na stražnjim kotačima:

$$\operatorname{tg} \alpha_{kl} = \frac{\varphi l_p - l f}{l - \varphi h_T}$$

Pogon na svim kotačima:

$$\operatorname{tg} \alpha_{kl} = \varphi$$

Tablica 4.3.

Maksimalni uspon u pojedinom stupnju prijenosa				
	$D_{\max}$	f	u [%]	α [°]
I. st	1,043	0,020	102,2%	45,64
II. st	0,606	0,020	58,6%	30,36
III. st	0,379	0,020	35,9%	19,73
IV. st	0,253	0,020	23,3%	13,12
V. st	0,177	0,021	15,7%	8,90
VI. st	0,130	0,021	10,9%	6,20
Maksimalni uspon prije prevrtanja			u [%]	α [°]
			256,9%	68,7
Maksimalni uspon prije proklizavanja			u [%]	α [°]
			40,2%	21,9

Najveći uspon koji vozilo može u teoriji savladati je uspon od 102,2% pri brzini od 11,6 km/h u prvom stupnju prijenosa. Ali u praksi, najveći uspon koji vozilo može savladati je uspon od 40,2 % iznad kojeg nastupa proklizavanje pogonskih kotača. Dakle, ovo vozilo u prvom i drugom stupnju prijenosa može savladati i veće uspone, ali nastupa proklizavanje pogonskih kotača.

4.3. Određivanje vremena ubrzanja

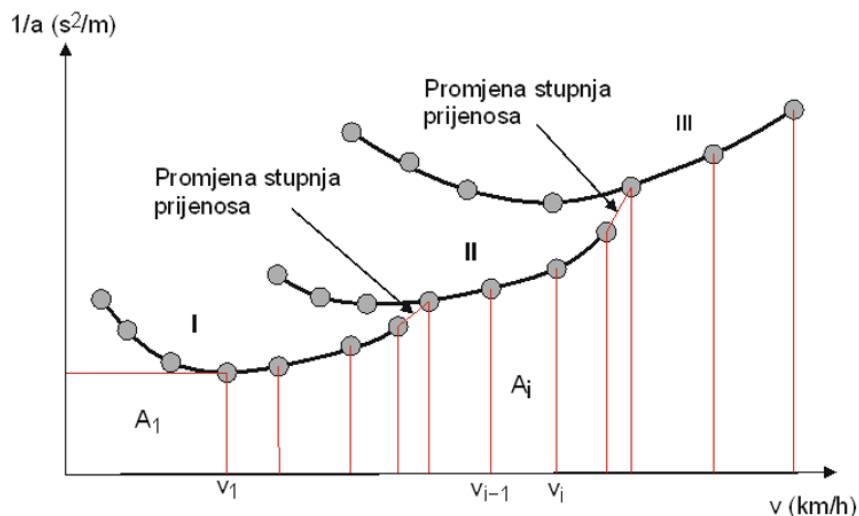
Ubrzanje je općenito jednako:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

pa je vrijeme potrebno za ubrzanje vozila od mirovanja, tj. od $v = 0$, do neke brzine v jednako:

$$t = \int_0^v \frac{1}{a} \cdot dv$$

Budući da je ubrzanje tablična funkcija, integral se rješava grafičkom metodom (površina ispod krivulje $1/a$, ili metodom numeričkog integriranja, što je prikazano na slici 4.2. za slučaj ubrzavanja kod trostupanjskog mjenjača.



Slika 4.2. Određivanja vremena ubrzanja

Kod izračuna vremena za ubrzanje vozila pretpostavlja se da stupnjevi prijenosa mijenjaju u viši stupanj u trenutku kad se postigne maksimalna brzina u tom stupnju. Također, ne uzima se obzir vrijeme potrebno za promjenu stupnja prijenosa i pretpostavlja se da nema proklizavanja kotača.

Vrijeme za ubrzanje do zadane brzine v se približno može odrediti numeričkom integracijom⁴ računajući površine trapeza A_i na slici 4.2.

$$t = \int_0^v \frac{1}{a} \cdot dv \approx \sum A_i = \sum (v_i - v_{i-1}) \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_i} + \frac{1}{a_{i-1}} \right)$$

Površina trapeza A_i predstavlja vrijeme Δt_i za ubrzanje vozila od brzine v_{i-1} do brzine v_i . Ako je brzina izražena u km/h, a ubrzanje u m/s^2 , tada je vrijeme za ubrzanje u sekundama jednako:

$$\Delta t_i = A_i = \left(\frac{v_i - v_{i-1}}{3,6} \right) \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_i} + \frac{1}{a_{i-1}} \right)$$

Obično se za ubrzanje od brzine $v = 0$ do brzine v_1 u prvom stupnju prijenosa pretpostavlja period proklizavanja. Uzima se da vrijeme proklizavanja t_1 traje do postizanja brzine v_1 koja odgovara maksimalnom ubrzanju u prvom stupnju prijenosa. Tom periodu prema tome odgovara površina pravokutnika A_1 :

$$\Delta t_1 = A_1 = \frac{1}{3,6} v_1 \cdot \frac{1}{a_1}$$

Vrijeme zaletavanja se računa od $v = 0$ do neke zadane brzine, npr. do $2/3$ od $v_{\max}$ ili do 100 km/h.

Najbliža proračunska točka brzini od 100 km/h je 105,1 km/h pa će se ubrzanje računati do te brzine.

⁴ Pogledati zadatak 6.2. za detaljnije objašnjenje

4.4. Određivanje prijeđenoga puta kod ubrzavanja

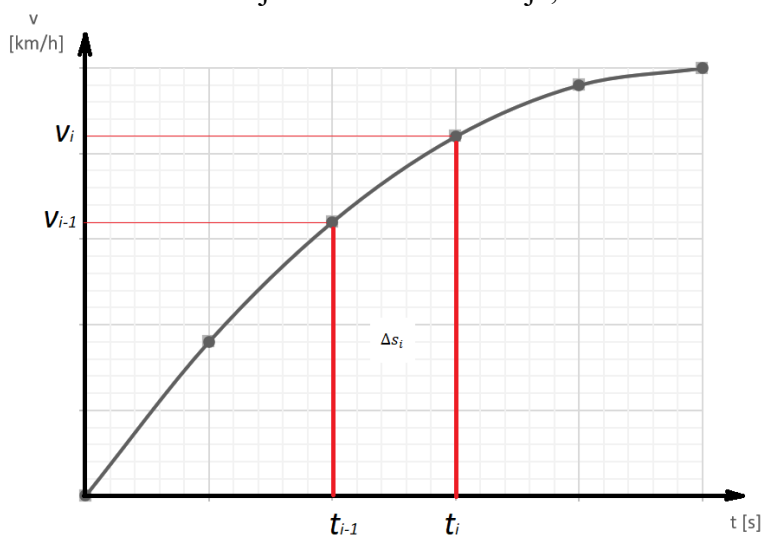
Brzina je općenito definirana:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

pa je prijeđeni put s za vrijeme ubrzavanja od trenutka $t=0$ do vremena t kad se postigne zadana brzina jednak:

$$s = \int_0^t v \cdot dt \quad (4.1)$$

Budući da je brzina v u funkciji od vremena t poznata u tabličnom obliku (izračunata u točki 3.2.), integral (4.1) se rješava grafičkom metodom ili metodom numeričkog integriranja⁵ kao i kod određivanja vremena ubrzavanja, slika 4.3.



Slika 4.3. Određivanje prijeđenog puta

Put Δs_i u m koji prijeđe vozilo za vrijeme povećanja brzine od v_{i-1} do v_i u vremenu od t_{i-1} do t_i jednak je površini trapeza:

$$\Delta s_i = (t_i - t_{i-1}) \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{v_i + v_{i-1}}{3,6} \right)$$

gdje je:

t - vrijeme u s

v - brzina u km/h

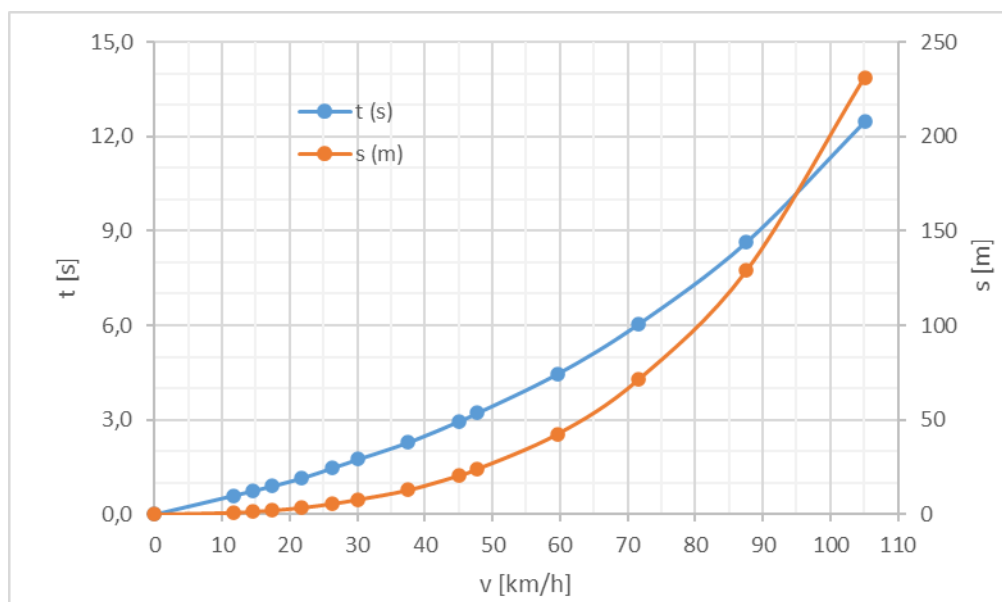
Ukupno prijeđeni put zaletavanja vozila od brzine $v = 0$ do neke zadane brzine v izračunate u točki 4.3. je jednak:

⁵ Pogledati zadatak 6.3 za detaljnije objašnjenje

$$s = \sum \Delta s_i$$

Tablica 4.4

St. prijenosa	v (km/h)	1/a (s ² /m)	Dt (s)	t (s)	Ds (m)	s (m)
	0	0	0,0	0,0	0	0
I. st.	11,6	0,185	0,597	0,597	0,97	0,97
	14,6	0,187	0,150	0,747	0,55	1,51
	17,5	0,196	0,155	0,902	0,69	2,20
	21,8	0,223	0,254	1,157	1,39	3,59
	26,2	0,286	0,309	1,465	2,06	5,65
II. st.	30,0	0,243	0,280	1,745	2,19	7,84
	37,5	0,277	0,542	2,288	5,09	12,93
	45,0	0,360	0,664	2,952	7,62	20,54
III. st.	47,7	0,349	0,263	3,215	3,39	23,93
	59,6	0,405	1,250	4,466	18,64	42,57
	71,6	0,545	1,575	6,040	28,69	71,27
IV. st.	87,6	0,628	2,608	8,648	57,63	128,90
	105,1	0,947	3,829	12,477	102,45	231,34



Slika 4.4. Vrijeme i put ubrzanja

Iz dijagrama se može grafički očitati potrebno vrijeme i put za ubrzanje vozila od 0 km/h do 100 km/h. Ovo vozilo postiže brzinu od 100 km/h za 11,5 sekundi, a pritom prijeđe 205 m.

5. ZAKLJUČAK

U zaključku ukratko opisati automobil, npr. vrsta (osobno, sportsko, terensko, teretno vozilo, oldtimer...) i marka automobila (ako je zadana), vrsta (Otto/Diesel) i snaga motora. Navesti oznaku pneumatika, vrstu transmisije i ostale podatke ako su posebno zadani.

U zaključku ponoviti (ali ne koristiti identične rečenice) najbitnije podatke dobivene proračunom kao što su:

- maksimalna brzina vozila na horizontalnoj cesti i u kojem stupnju prijenosa se postiže;
- kolika je maksimalna sila koja se prenosi na podlogu; može li vozilo prenijeti na podlogu sile koje ostvaruje u nižim stupnjevima prijenosa;
- maksimalni uspon koji vozilo može savladati s obzirom na dinamičku karakteristiku; pri kojoj brzini i u kojem stupnju prijenosa;
- maksimalni uspon koji vozilo može savladati s obzirom na stabilnost (prevrtanje i klizanje);
- potrebno vrijeme i put ubrzavanja vozila od 0 do 100 km/h.

LITERATURA

- [1] Mikulić, D.: *Motorna vozila-Teorija kretanja i konstrukcija*, Veleučilište Velika Gorica, III izdanje, Velika Gorica, 2020.
- [2] Dacić, S. i sur.: *Osnove dinamike vozila, zbirka zadataka*, Mašinski fakultet Sarajevo, Sarajevo, 2008.
- [3] Perše, S., Višnjić, V.: *Strojarstvo u prometu*, Fakultet prometnih znanosti, Zagreb, 2005.
- [4] Vrhovski D. Nikšić M.: *Osnove strojarstva, zbirka riješenih zadataka*, Fakultet prometnih znanosti, Zagreb, 2000.
- [5] Cerovac V.: *Tehnika i sigurnost prometa*, Fakultet prometnih znanosti, Zagreb, 2001.
- [6] Stojić, B. *Teorija kretanja drumskih vozila, skripta*, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, 2012.
- [7] Stojić, B.: *Uputstvo za izradu vučnog proračuna*, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, 2009.